
Universidad
Tecmilenio®

Universidad Tecmilenio

Matemáticas computacionales para inteligencia artificial

Geometría analítica

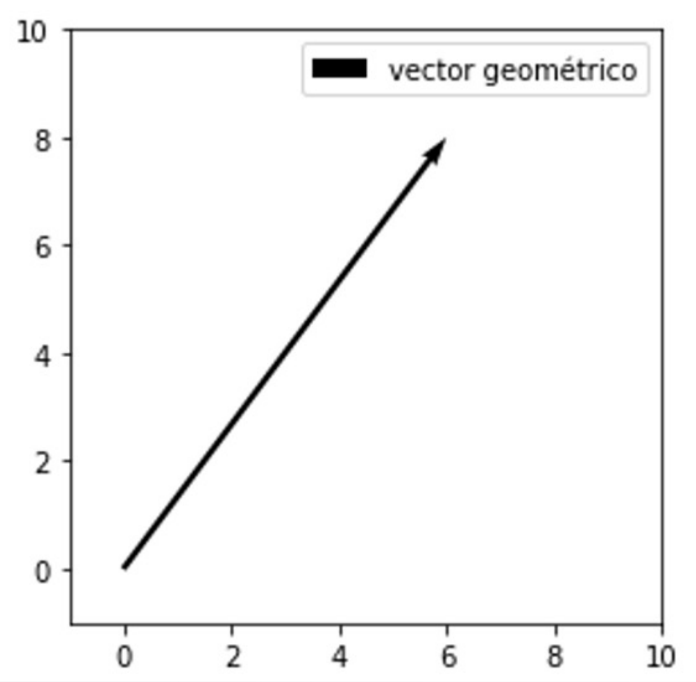
Introducción

Muchos de los conocimientos matemáticos con los que actualmente interactuamos para resolver los problemas de la inteligencia artificial datan de cientos de años de antigüedad.

La geometría analítica guarda una estrecha relación con el aprendizaje automático, comenzando por el vector geométrico que se estudió en los primeros años escolares y llegando hasta las complejas aplicaciones de reducción dimensional del espacio vectorial, que son muy utilizadas por las redes neuronales en las implementaciones modernas de aprendizaje profundo.

Explicación

Es muy común representar el vector geométrico mediante un segmento que parte directamente desde el origen y donde su longitud se obtiene de forma intuitiva, analizando la distancia que separa el fin de dicho vector y el lugar donde se originó.

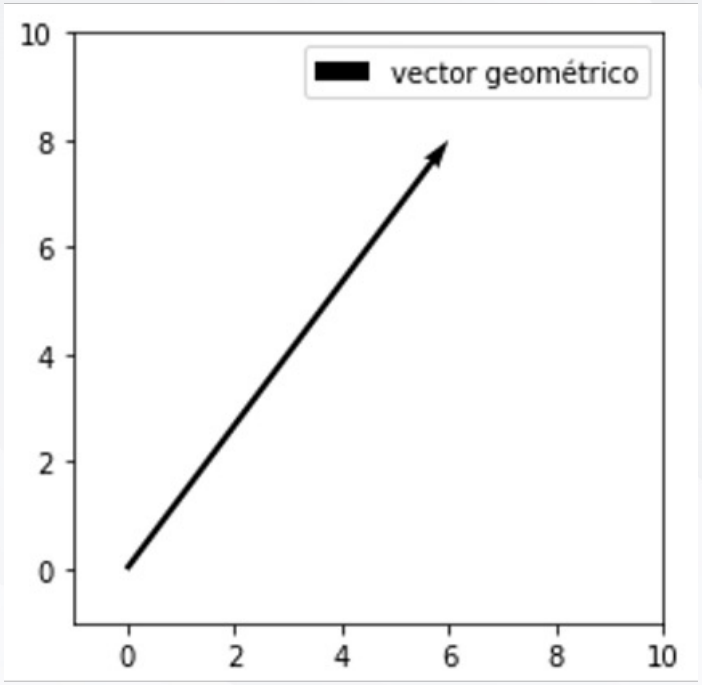


Explicación

En el aprendizaje automático los datos pueden representarse como vectores.

Hay una serie de situaciones en las que necesitamos calcular la norma vectorial, por ejemplo:

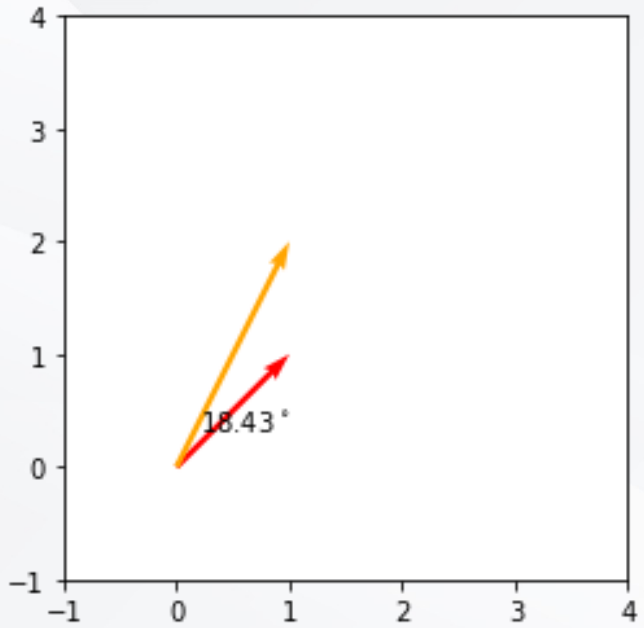
- Determinar la magnitud de un punto de datos en múltiples dimensiones.
- Calcular la pérdida de un modelo de aprendizaje automático.
- Calcular el error de un modelo predictivo.



Explicación

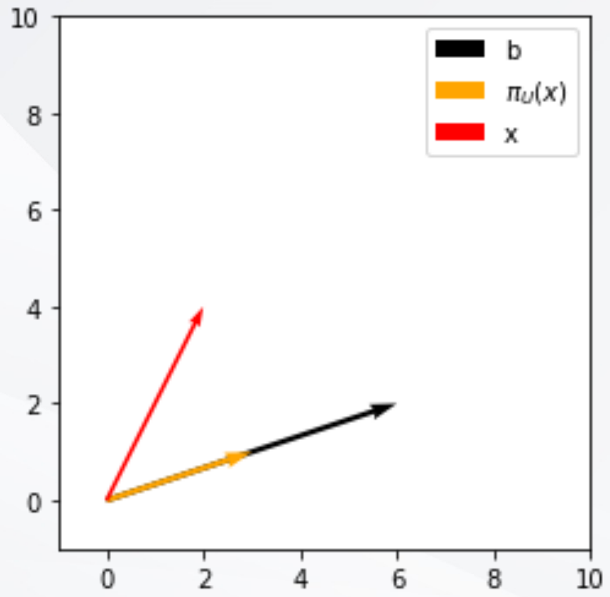
En un espacio vectorial real con producto interno definido, el ángulo que forman dos vectores $\angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ dentro de este, se puede definir como:

$$\angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \cos^{-1} \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$



Explicación

Las proyecciones son unas de las transformaciones lineales más importantes, junto a la rotación y la reflexión. Juegan un rol principal en el trabajo con gráficos, las teorías de codificación, la estadística y el aprendizaje automático.



Una las proyecciones más utilizadas es la proyección ortogonal, la cual es muy útil para transformar conjuntos de datos sobredimensionados, minimizando los errores y las pérdidas entre los datos originales y su correspondiente proyección.

Actividad

Investiga sobre los diferentes tipos de normas vectoriales que existen y cuáles son sus principales aplicaciones.

Cierre

En este tema se estudiaron los fundamentos de la geometría analítica que son elementales para las aplicaciones de aprendizaje automático.

Se explicaron operaciones de vectores dentro de un mismo espacio vectorial.

También se abordaron los principales aspectos de la proyección ortogonal y se vio como las proyecciones son de gran ayuda en el procesamiento de datos sobredimensionados, permiten optimizar los modelos predictivos a través de pequeños ajustes en las funciones de pérdida.

Universidad Tecmilenio

Matemáticas computacionales para inteligencia artificial

Descomposición matricial

Introducción

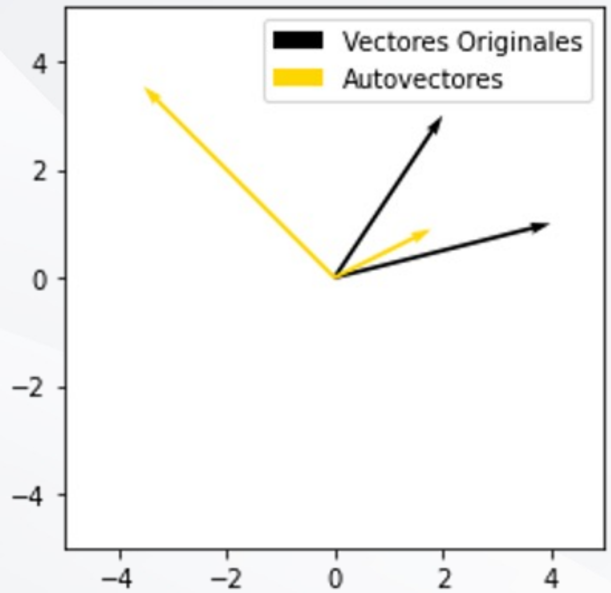
Las matrices pueden ser descompuestas y dichas descomposiciones son utilizadas para realizar aproximaciones matriciales.

Asimismo, estudiarás los fundamentos de descomposición de matrices en valores singulares, que, junto al análisis de componentes principales, juegan un papel primordial en los modelos de aprendizaje automático y en la inteligencia artificial.

Explicación

El autoanálisis o análisis Eigen permite interpretar el mapeo lineal y sus matrices de transformación asociadas.

Los autovalores de una transformación lineal nos indican cuáles de los vectores especiales (autovectores) son modificados por dicha transformación.



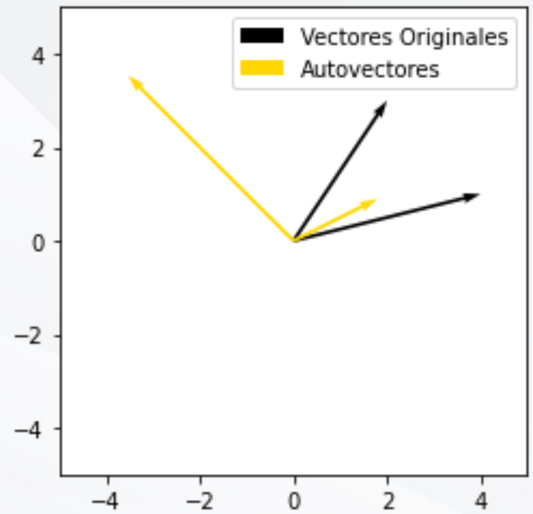
Sea una matriz cuadrada $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, entonces $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n \times n} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ es el correspondiente autovector de $\boldsymbol{A}$ si:

$$\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{A}$$

Explicación

El autoanálisis o análisis Eigen permite interpretar el mapeo lineal y sus matrices de transformación asociadas.

Los autovalores de una transformación lineal nos indican cuáles de los vectores especiales (autovectores) son modificados por dicha transformación.

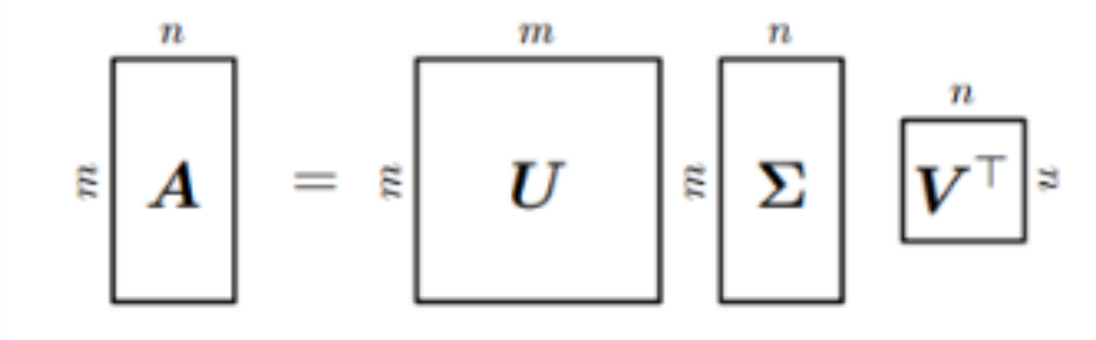


Sea una matriz cuadrada $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, entonces $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n \times n} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ es el correspondiente autovector de $\boldsymbol{A}$ si:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{A}$$

Explicación

La descomposición en valores singulares (SVD) de una matriz es el principal método de descomposición del álgebra lineal, incluso ha sido referido como el teorema fundamental de esta especialidad matemática, ya que puede aplicarse a todo tipo de matrices, y no solamente a las cuadradas.



En la inteligencia artificial y el aprendizaje automático la SVD trabaja en conjunto con el análisis de componentes principales (PCA) para facilitar el procesamiento de grandes conjuntos de datos, encontrar estructuras, entender su composición y obtener información relevante de estos.

Actividad

Lee y responde las siguientes preguntas.

¿Consideras que la matriz: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ podría descomponerse en autovalores y autovectores?

¿Qué procedimiento crees que sería el adecuado?

Cierre

Conociste sobre dos tipos principales de descomposición matricial: los autovectores y la descomposición en valores singulares.

La autodescomposición ofrece una ventaja computacional increíble al utilizar en su implementación el apoyo de las matrices diagonales, mientras que la SVD es mucho más abarcadora ya que puede ser aplicada a matrices que no tienen que ser necesariamente cuadradas.

La interpretación geométrica de las transformaciones nos da una idea de la varianza que tienen los datos en función de algunas características específicas. La descomposición en valores singulares es la base de los modelos estadísticos de regresión lineal y de los sistemas de clasificación, tan relevantes en la actualidad.