Tema 3. Aplicaciones de la derivada

Introducción

Las aplicaciones de las derivadas son muy variadas y, conforme pasa el tiempo, encuentran más campos de acción, sobre todo como comparación entre funciones. Estas últimas pueden representar velocidad, aceleración, el máximo o mínimo de una función, o bien delimitar la magnitud de una gráfica, la de una población de cierto lugar, así como la optimización de un espacio al crear el mayor volumen con una cantidad mínima de material.

La derivada se utiliza cada vez más en diferentes áreas, es decir, ya no se limita al campo de las ingenierías.

Explicación

Aplicaciones físicas de la derivada (velocidad instantánea, distancia, rapidez de cambio y de optimización)

La derivada se convierte en función cuando encuentra su límite correspondiente muy cercano a cero (Stewart, 2021).

En los siguientes ejemplos, observa atentamente la explicación y analiza cómo se aplican las fórmulas de las derivadas en relación con cada caso. El primero trata sobre velocidad promedio y velocidad instantánea, así que se recurre a la derivada en física.

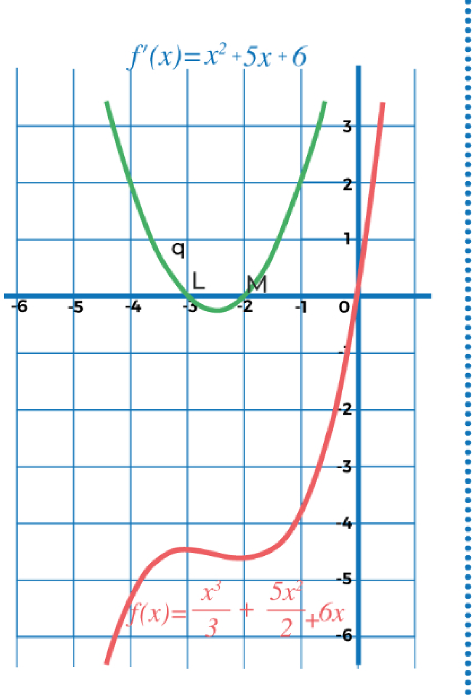
Una partícula se mueve a razón de $t^2 + 2t - 3$. Determina la ecuación y qué velocidad tiene en el instante $t = 3s$.

Ecuación	Función del movimiento
t^2+6t-3	Aplica la regla de la suma o resta de dos funciones diferentes. $y=[f(x)\pm g(x)]\rightarrow y'=f'(x)\pm g'(x)$ Selecciona las fórmulas para derivar cada término:
$\frac{d}{dx}t^2=2t$	$\frac{d}{dx}(cx^n)=ncx^{n-1}$
$\frac{d}{dx}6t=6$	$\frac{d}{dx}(cx)=c$
$\frac{d}{dx}-3=0$	$\frac{d}{dx}(c)=0$
$2t+6$	Al unir los resultados, obtienes la ecuación de la velocidad promedio.
Sustituye t en la ecuación de la velocidad promedio para obtener la velocidad instantánea.	
Resultado: $2t+6=2(3)+6=6+6=12m/s$	

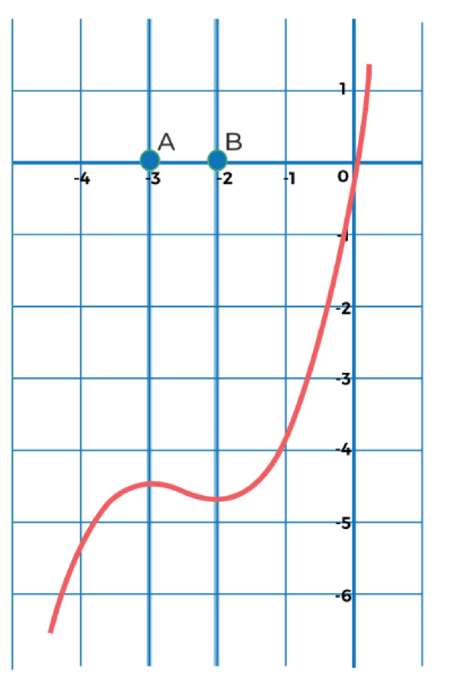
Tabla 1. Velocidad y velocidad instantánea.

Se aplica la derivada para obtener el máximo y mínimo de $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 6x$, por medio de la primera y segunda derivada.

Función	$y=\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{3}+6x$
Para obtener la primera derivada, aplica la regla de la suma o resta de dos funciones diferentes. $y=[f(x)\pm g(x)]\rightarrow y'=f'(x)\pm g'(x)$	
Selecciona las fórmulas para derivar cada término: $\frac{d}{dx}(cx^n)=ncx^{n-1}$ $\frac{d}{dx}(cx)=c$ $\frac{d}{dx}(c)=0$	$y'= x^2+5x+6$
Factoriza la primera derivada. promedio.	$(x+2)(x+3)$
Cada factor se iguala a cero y se despeja la x.	$x+2=0$ $x=-2$ $x+3=0$ $x=-3$
$x=-2,\ x=-3$	
Estos son los valores donde localizarás los máximos y mínimos de la función. Para encontrar sus puntos completos, sustituye el valor de x en $f(x)$. $x=-2,\ x=-3$	
Sustitución de $x=-2$ en: $y=\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+6x$	
$f(x)=\frac{(-2)^3}{3}+\frac{5(-2)^2}{2}+6(-2)=-4.67$ Punto localizado en (-2,-4.67), como puedes ver en la gráfica 2.	
Sustitución de $x=-3$: $y=\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+6x$	
$f(x)=\frac{(-3)^3}{3}+\frac{5(-3)^2}{2}+6(-3)=-4.5$ Punto localizado en (-3,-4.5), como puedes ver en la gráfica 2.	



Gráfica1. Máximo y mínimo de una función.



Gráfica 2. Localización de los puntos críticos.

Tabla 2. Primera derivada.

Para determinar la concavidad, necesitas obtener la segunda derivada.

$f'(x)= x^2+5x+6$	Segunda derivada
$\frac{d}{dx}x^2=2x$ $\frac{d}{dx}5x=5$ $\frac{d}{dx}6=0$	Fórmulas para obtener la segunda derivada: $\frac{d}{dx}(cx^n)=ncx^{n-1}$ $\frac{d}{dx}(cx)=c$ $\frac{d}{dx}(c)=0$
Resultado.	$f''(x)= 2x+5$

Tabla 3. Segunda derivada.

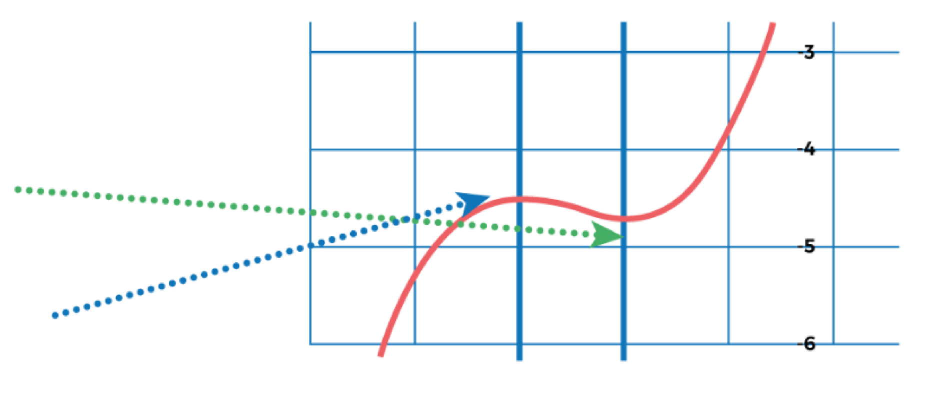
Ahora, en el lugar de la x, debes colocar su valor en el punto crítico.

Si obtienes un número positivo, sabrás que existe un mínimo.

$$f''(x) = 2(-2) + 5 = +1 =$$

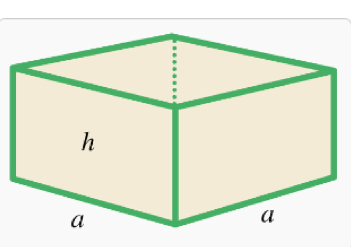
Al obtener un número negativo, sabrás que existe un máximo.

$$f''(x) = 2(-3) + 5 = -1 =$$



Gráfica 3. Posición de máximo y mínimo.

Observa el siguiente ejemplo de aplicación de derivada para optimización de volumen.



Necesitas fabricar una caja cuadrada de $12{,}345\ cm^3$, sin embargo, tienes que ahorrar la mayor cantidad de material posible. ¿Qué dimensiones tendrá la caja para economizar el material?

1. Dado que la base es cuadrada (*a2*) y no se menciona la altura (h), la fórmula del volumen de la caja es la siguiente:

$$V = a^2h$$

Donde $V = 12{,}345\ cm^3$.

2. Se despeja h.

$$h = \frac{12{,}345}{a^2}$$

3. Se suman todas las áreas.

$$At = \acute{a}rea\ total$$

$$At = a^2 + 4ah$$

$$At = a^2 + 4a\frac{12{,}345}{a^2}$$

En este punto se puede eliminar a.

$$At = a^2 + 4\cancel{a}\frac{12{,}345}{a^{\cancel{2}}}$$

$$At = a^2 + 4\frac{12{,}345}{a}$$

$$a^2 = \frac{49{,}380}{a}$$

Se pueden unir las a.

$$a^3 = 49{,}380$$

4. Calcula la raíz cúbica de ambos lados de la igualdad.

$$a = 36.68cm.$$

5. Ahora, obtén el valor de h:

$$h = \frac{12{,}345}{a^2} = \frac{12{,}345}{36.68^2}$$

$$h = 9.17\ cm.$$

Los resultados son estos: $h = 9.17\ cm$ y $a = 36.68cm.$

Comprobación: $(36.68)(36.68)(9.17) = 12{,}345\ cm^3$

De esta manera, calculas el máximo volumen con el mínimo de material, es decir, se trata de un trabajo de optimización.

Cierre

Recuerda que las funciones nos muestran un hecho concreto, así que podemos derivarlas por definición o por fórmula. Según el contexto, la primera derivada representa una pendiente, velocidad o simplemente una razón de cambio; la segunda derivada, por su parte, se obtiene de la primera y puede significar aceleración, o bien un punto máximo o mínimo de una función.

Checkpoint

Asegúrate de:

- Comprender las relaciones entre funciones y el significado de las derivadas para resolver situaciones complejas.
- Identificar las relaciones entre la gráfica de una función y su derivada para localizar los puntos máximos y mínimos o la pendiente.

Bibliografía

- Stewart, J. (2021). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas* (9ª ed.). México: Cengage.