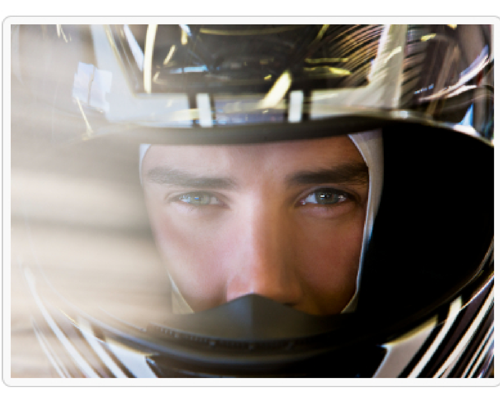
Tema 6. Aplicaciones de la integral definida

Introducción



En este tema descubrirás las aplicacionesde la integral definida. Conocer qué es una integral, así como sus métodos de integración, te permitirá resolver ejercicios donde se contemplen y, además, aplicarla en términos concretos.

Las integrales se emplean en probabilidad, computación, ingeniería y otros ámbitos. Sirven para resolver áreas delimitadas por rectas y curvas, ya que generalmente construyen figuras irregulares.

Explicación

Teorema fundamental del cálculo

Para resolver integrales definidas, primero selecciona el método de integración y después utiliza el teorema fundamental del cálculo (Stewart, 2021). En este, el valor de a es el más pequeño y el valor de b mayor. Para calcular el área de una función con respecto al eje x, el teorema se presenta de esta manera:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

En estos casos, se resuelve como si se tratara de una integral normal por alguno de los métodos ya revisados: antiderivada, integración por partes, por sustitución trigonométrica o por fracciones parciales. Al tener el resultado de la integral, sustituye el valor de b y resta la misma función, pero con la sustitución del valor de a. A lo largo del tema, esto se explicará mediante algunos ejemplos.

Si necesitas encontrar el área entre dos curvas, entonces recurre a la siguiente fórmula:

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = [F(b) - F(a)] - [g(b) - g(a)]$$

En ella, se integran las fórmulas por separado y se restan sus resultados.

Examina los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1. En la integración definida de un logaritmo natural, primero se integra solo el logaritmo que, de acuerdo con sus características, se resuelve por el método de sustitución por partes. Como puedes ver, los ejercicios ya están desarrollados, así que la integración definida se centra en el resultado y en la forma de la gráfica.

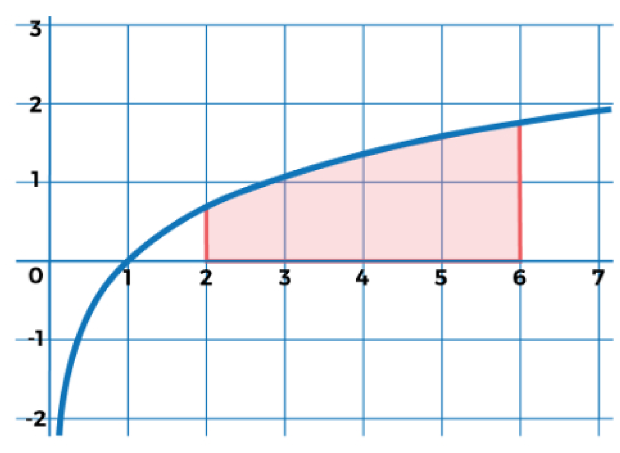
$$\int_2^6 (\ln(x))d(x) = x\ln(x) - x + c$$

Este es el resultado:

$$x\ln(x) - x + c$$

Como es una sola función y se pide el área respecto al eje de las x, entonces se utiliza esta fórmula:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$



Gráfica 1. (ln(x)).

Se sustituyen los valores en el resultado de la integral definida:

$$= (6\ln(6) - 6) - (2\ln(2)) - 2)$$

$$= 4.75 + 0.61$$

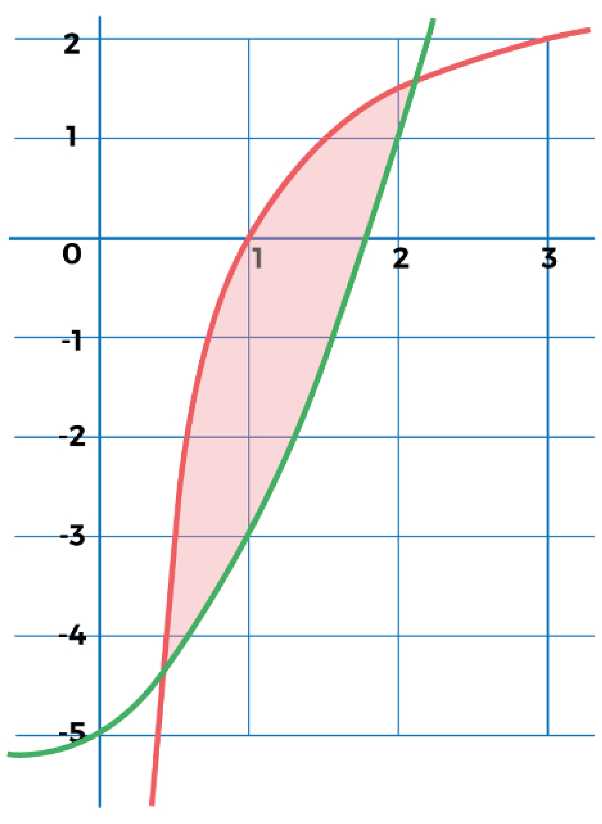
$$= 5.36u^2$$

Ejemplo 2. Ahora, debes encontrar el área entre dos funciones. Utiliza la fórmula de la integral definida:

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = [F(b) - F(a)] - [g(b) - g(a)]$$

$$\int_{0.4}^{2.11} \left(\frac{3x^2 - 6x + 3}{(x^2 + x)}\right) - (x^2 + x - 5)d(x) =$$

Observa la gráfica 2, notarás que por el valor de 1 en x, la línea naranja pasa de abajo hacia arriba de la x. En caso de que toda el área estuviera debajo o arriba de las x, este paso se omite.



Gráfica 2. Integral definida de 2.

$$\int_{0.4}^{1} \left(\frac{3x^2 - 6x + 3}{(x^2 + x)}\right) - (x^2 + x - 5)d(x) = 3x - 3ln(x) - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 5x$$

$$1.3191|$$

$$\int_{1}^{2.11} \left(\frac{3x^2 - 6x + 3}{(x^2 + x)}\right) - (x^2 + x - 5)d(x) = 3x - 3ln(x) - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 5x$$

$$2.1159$$

El resultado debe sumarse, ya que las líneas naranja y morada están en lugares diferentes: una por debajo y otra por encima de x.

$$1.3191 + 2.1159 = 3.4350u^2 \ldots$$

Integral definida costo de producción

Examina el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3. Una fábrica compró una máquina de la que se espera una producción x, pero está calibrada para operar con un costo de producción de $f(x) = 25x + 500$. ¿Cuál es el costo de producción de los primeros tres objetos?

Las indicaciones solo mencionan los primeros tres artículos, así que se el 0 se toma como número inferior y el 3 como superior.

$$\int_0^3 (25x + 500)d(x)$$

Esta integración es de tipo antiderivada, entonces:

$$\frac{25x^2}{2} + 500x$$

Como solo es una función con respecto a la línea de las x, se procede de esta forma:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

En el resultado de la integración, se sustituyen los valores y se restan de esta forma:

$$\left(\frac{25(3)^2}{2} + 500(3)\right) - \left(\frac{25(0)^2}{2} + 500(0)\right) =$$

$$\int_0^3 (25x + 500)d(x) = 1612.5$$

Por tanto, el costo será de $\$1{,}612.5$ por las primeras tres unidades. Como puedes observar, en ocasiones se necesita una gráfica para saber cómo actuar frente a estas integrales definidas y poder aplicarlas; sin embargo, otras veces, como en el ejemplo de costo de producción, no se precisa de dicha herramienta visual.

Cierre

Recuerda que debes tener paciencia y verificar los resultados en esta clase de ejercicios. Las integrales definidas sirven para delimitar el área de figuras irregulares y suelen representarse mediante gráficas. En estos casos, primero selecciona el método de integración y luego decide cómo aplicarás el teorema fundamental del cálculo.

Checkpoint

Asegúrate de:

- Comprender las diferencias entre las integrales para saber cómo utilizar el teorema fundamental del cálculo.

Bibliografía

- Stewart, J. (2021). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas* (9ª ed.). México: Cengage.