Tema 1. Límites

Introducción

Alguna vez te has preguntado, ¿cuál es la utilidad de las derivadas en la vida diaria? Con ellas, se determina la pendiente de las funciones y se maximiza la eficiencia, por ejemplo, al encontrar el área máxima que se puede utilizar para hacer un cilindro con la mínima cantidad de material.

Existen diferentes fórmulas para encontrar la derivada y, en este tema, examinarás ejercicios donde los límites marcan la primera derivada de una función por su definición.

Explicación

Propiedades de los límites

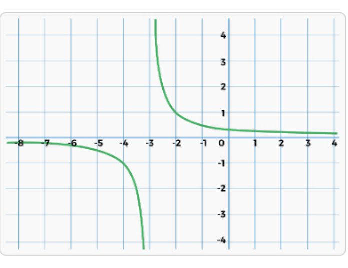
La primera aproximación a la derivada se da mediante el concepto de límite, ya que es una función muy cercana a un punto. El concepto de derivada se interpreta desde la geometría como "la pendiente de una curva" y desde la física como una razón instantánea de cambio (Pérez, s.f.). Como función, tienen valores de $f(x)$ y se aproximan al límite cuando x se acerca a un valor a. Existen 3 tipos de límites: los que tienden a a, los que tienden a cero y los que tienden a infinito. Observa la tabla 1.

x tiende a a	x tiende a 0	x tiende a ∞
$lim_{x\to a} L$	$lim_{x\to 0} L$	$lim_{x\to\infty} L$

Tabla 1. Tipos de límites.

Límites de funciones polinomiales y con variables independientes

Ejemplo 1. En la función $\frac{x-3}{x^2-9}$, x tiene un valor de 3, que se ve reprecentado en la grafica 1. Al escribirla como funcion, el límite se expresa como:



$$lim_{x\to a} L$$

$$lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$$

Al sustituir x en la función del límite, arroja un resultado indeterminado o infinito; entonces, lo recomendable es factorizar y eliminar, de tal forma que el denominador no equivalga a cero.
1. Sustitución de x.

$$lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{3-3}{3^2-9}=\frac{3-3}{9-9}=\frac{0}{0}=indeterminado$$

2. Se factoriza.

$$lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=$$

3. Se eliminan los factores iguales, en este caso $x-3$, siendo el facto eliminado el hueco de la función

$$\frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}(x+3)}=$$

Donde:

- Factor eliminado: $x-3$.
- Ubicación del hueco: $x=3$.
- Factor no eliminado: $x+3$.
- Asíntota vertical: $x=-3$.

4. Sustituye el valor de x en la función.

$$\frac{1}{(x+3)}=\frac{1}{(3+3)}=$$

Por tanto, el resultado es el siguiente:

$$\frac{1}{6}=0.1666$$

Recta tangente de funciones algebraicas

La pendiente de una función es la tangente del ángulo de inclinación con respecto al eje de las x, también considerada la primera derivada de una función.

Los conceptos de límite y pendiente se pueden unir, ya que la pendiente se toma como un límite. Observa las siguientes fórmulas y analiza su estructura; luego, encontrarás ejercicios que describen las igualdades entre límite y pendiente.

$$\lim\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

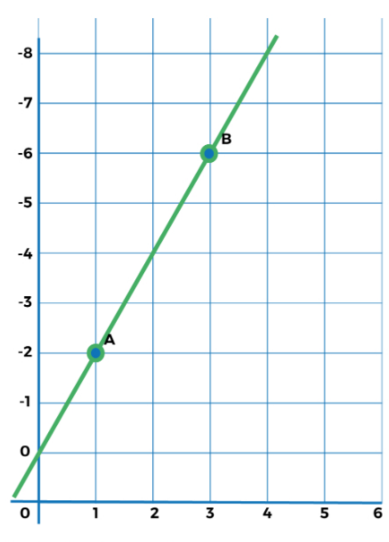
A continuación, se presenta la fórmula de la pendiente de una función:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

La fórmula se describe como el cociente de dos puntos: la diferencia de y dividida entre la de x.

En el siguiente ejemplo, se deben graficar los puntos A y B que comparten una línea recta.

Puntos
A (1,3)
B (3,7)



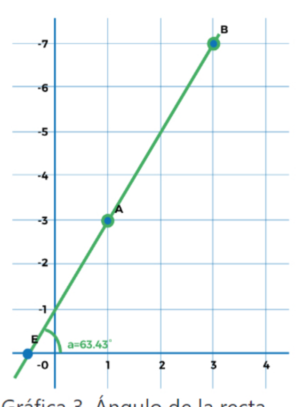
Gráfica 2. Recta de dos puntos.

1. Se emplea la fórmula de la pendiente.

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

2. Se obtiene el resultado de la primera derivada, a partir de los siguientes valores:

$$x_2=2$$
$$x_1=1$$
$$y_2=7$$
$$y_1=3$$



Gráfica 3. Ángulo de la recta.

3. Se sustituyen los valores de los puntos A y B en la fórmula.

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{7-3}{3-1}=\frac{4}{2}=2$$

4. El resultado de la pendiente es el siguiente:

$$m=2$$

Obtener la pendiente de una función sirve para determinar el ángulo de inclinación, comúnmente llamado θ, que tiene la recta.

Con ayuda de la función trigonométrica inversa de la tangente, se obtiene θ de la recta trazada. Observa la gráfica 3, en ella encontrarás señalado el ángulo de inclinación de la recta.

$$tan^{-1}m=\theta$$

$$tan^{-1}2=63.43°$$

Como te habrás percatado, los límites son muy interesantes por sus múltiples usos. La primera derivada de una función se obtuvo por medio del concepto de pendiente y se expuso su utilidad desde una perspectiva geométrica.

Las siguientes relaciones te ayudarán a enlazar algunos conocimientos matemáticos y físicos; debes tener en cuenta que dichas igualdades permiten correlacionar ambas disciplinas.

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=tan\theta=\frac{d}{dx}y'=V_{prom}$$

Donde V_{prom} está conformado por: velocidad promedio o velocidad media.

Derivada por definición de límite

La derivada por definición se trata de una función contenida en un intervalo, con un límite correspondiente a la variable independiente cuando tiende a cero (Ramos, 2018). Desde esta perspectiva, se encuentra al límite como derivada.

Si tienes los puntos y necesitas obtener la función, emplea la fórmula de la definición de derivada por límite:

$$V(a)=lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=$$

Examina el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2. Un automóvil se mueve a razón de $f(t)=4t^2$. Calcula la velocidad media entre $t=1s$ y $t=2s$, así como la velocidad en el instante $t=5$ y considera V en $^m/_s$.

En este caso, se pide determinar la velocidad media entre $t=1s$ y $t=2s$, así que sustituye el valor de t en la ecuación del desplazamiento. Se obtienen estos resultados:

t	$f(t)=4t^2$
1	4
2	16

Tabla 1. Automóvil en movimiento.

Con estos valores se obtiene la V_{prom}.

1. Como laV_{prom} es igual a $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, entonces:

$$V_{prom}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{16-4}{2-1}=12\,^m/_s$$

La velocidad promedio es de $12\,^m/_s$.

2. Para obtener la función necesaria, se recurre a la fórmula de la definición de la derivada, ya que no se cuenta con una ecuación de velocidad. Esta se puede elaborar de la siguiente manera:

$$V(a)=lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=$$

3. Definir $f(a+h)-f(a)$.

$$f(a)=4t^2$$

$$f(a+h)=\ 4(t+h)^2$$

4. Coloca $f(a+h)-f(a)$ respectivamente y soluciona las operaciones algebraicas necesarias. Esto se hace con el propósito de eliminar h del denominador, ya que tiende a cero y eso perjudica el límite.

$$\frac{4(t+h)^2-4t^2}{h}=\frac{4(t^2+2th+h^2)-4t^2}{h}=\frac{4t^2+8th+4h^2-4t^2}{h}$$

$$=\frac{\cancel{4t^2}+8th+4h^2\cancel{-4t^2}}{h}=\frac{8th+4h^2}{h}=\frac{8th+4h^2}{\cancel{h}}=$$

$$V(a)=lim_{h\to 0}8t+4\cancel{h}$$

5. Al obtener el resultado, se sustituye el valor $t=5$ para conocer la velocidad en ese instante.

$$8t$$

En $t=5s$

$$8t=8(5)=40\,^m/_s$$

Así, podemos concluir que en $t=5$ se llega a una velocidad de $40\,^m/_s$.

La relación entre las fórmulas de las integrales y sus aplicaciones se encuentra estrechamente vinculada con las derivadas.

Cierre

El cálculo diferencial ha evolucionado y ahora tiene diversas aplicaciones, sobre todo porque se le otorga mayor relevancia a la primera y segunda derivada de la función. El concepto de límite para definir a la derivada aún resulta válido, pero ya no del todo práctico, pues existen métodos sintetizados para conseguir los mismos resultados. A pesar de esto, se puede decir que se trata de un procedimiento correcto que, en situaciones como las antes descritas, permite resolver los problemas.

Checkpoint

Asegúrate de:

- Comprender las relaciones existentes entre igualdades para elegir la operación.
- Identificar el argumento de la función con el fin de derivar para dicha variable.
- Entender la fórmula de la definición de derivada por límite para reconocer la operación que debe realizarse.

Bibliografía

- Pérez, F. (s.f.). *Cálculo Diferencial e Integral de Funciones de una Variable*. Recuperado de https://www.ugr.es/~fjperez/textos/calculo_diferencial_integral_func_una_var.pdf
- Ramos, J. (2018). *Calculo Diferencial*. México: Alfaomega.