

Tema 4. Múltiplos y divisores

Introducción

Entender y clasificar números es una parte muy importante de las matemáticas, ya que de ambas acciones parte toda la conceptualización del universo. Para hacer esto se necesita separarlos en dos grupos: múltiplos y divisores. En esta experiencia educativa comprenderás los números a partir de sus múltiplos, determinarás su cantidad, aprenderás el mínimo común múltiplo y analizarás números en función de sus divisores para encontrar el mayor de ellos. Cada noción adquirida en este tema te permitirá avanzar en tu desarrollo y comprensión de las matemáticas como ciencia.



Explicación

De acuerdo con Clarín (2022), los conceptos de múltiplos y divisores se encuentran íntimamente ligados, pues ambos permiten clasificar y agrupar los números con mayor detalle.

Múltiplos

Un número es múltiplo de otro si lo contiene una cantidad entera de veces; en ocasiones, este concepto resulta algo confuso, pero se puede entender desde una perspectiva muy simple: hay que contemplarlo como una multiplicación de una cifra n por los números naturales.

$$\begin{aligned} 3 \times 1 &= 3 \\ 3 \times 2 &= 6 \\ 3 \times 3 &= 9 \\ 3 \times 4 &= 12 \\ 3 \times 5 &= 15 \\ 3 \times 6 &= 18 \end{aligned}$$

Por ejemplo, en el caso de 12, el 4 se encuentra tres veces en él, mientras que el 3 lo hace en cuatro ocasiones. Por su parte, tres veces 5 equivale a 15, ya que 15 es múltiplo de 3 y también de 5. En resumen, si quieres encontrar los múltiplos de un número basta con multiplicarlo por diferentes cifras (1, 2, 3, 4, 5, 6...).

Mínimo común múltiplo

Entre las propiedades de los múltiplos de un número se encuentra el múltiplo común. De acuerdo con Calvo (2023), se trata de un múltiplo de dos o más cifras al mismo tiempo; por ejemplo, para determinar los múltiplos comunes de 3 y 5 menores a 50, primero debes calcular los de cada uno, como se muestra a continuación:

$3 \times 1 = 3$	$5 \times 1 = 5$
$3 \times 2 = 6$	$5 \times 2 = 10$
$3 \times 3 = 9$	$5 \times 3 = 15$
$3 \times 4 = 12$	$5 \times 4 = 20$
$3 \times 5 = 15$	$5 \times 5 = 25$
$3 \times 6 = 18$	$5 \times 6 = 30$
$3 \times 7 = 21$	$5 \times 7 = 35$
$3 \times 8 = 24$	$5 \times 8 = 40$
$3 \times 9 = 27$	$5 \times 9 = 45$
$3 \times 10 = 30$	$5 \times 10 = 50$

Tabla 1. Múltiplos comunes del número 3 y 5.

De este procedimiento obtenemos que 15 y 30 son múltiplos comunes de 3 y 5. Ahora bien, una noción indispensable en esta clase de ejercicios es el mínimo común múltiplo; como su nombre lo indica, se trata del menor de los múltiplos comunes, así que en el ejemplo anterior es 15. Entre las curiosidades de este tema encontramos que el cero es múltiplo de cualquier número, pero es el único de sí mismo.

Observa el siguiente ejemplo:

- a. Encuentra los múltiplos de 4 y 7 menores o iguales a 20.

$4 \times 1 = 4$	$7 \times 1 = 7$
$4 \times 2 = 8$	$7 \times 2 = 14$
$4 \times 3 = 12$	$7 \times 3 = 21$
$4 \times 4 = 16$	
$4 \times 5 = 20$	

Tabla 2. Múltiplos del número 4 y 7.

Para resolver este ejercicio, debes obtener los múltiplos menores de 20 para cada número. En el caso del 4 son 4, 8, 12, 16 y 20; por su parte, el 7 sólo tiene dos: 7 y 14.

- b. ¿Cuál es el mínimo común múltiplo de 4 y 7?

En este caso, no se tiene un múltiplo común; sin embargo, su mínimo común múltiplo se obtiene de esta forma: $2 \cdot 7 = 14$

MCD o máximo común divisor

Los divisores son aquellos números naturales que pueden dividir una cifra de manera exacta; esto significa que al dividirse arrojan un valor natural entero y dejan un residuo o resto de cero. Los divisores son recíprocos a los múltiplos; por tanto, si 15 es múltiplo de 5, entonces 5 es divisor de 15.

Cada número tiene una cantidad concreta de divisores; por ejemplo, el número 1 cuenta con un solo divisor que es él mismo 1. Para comprobar si x es divisor de y , tienes que dividirlos; si el producto es exacto, x es divisor de y . No obstante, existen algunas reglas que permiten saber si un número es divisible entre otro, sin necesidad de realizar las operaciones:

- Los múltiplos de 2 terminan en 0, 2, 4, 6 u 8; por ejemplo, el 20 resulta divisible entre 2 porque termina en cero.
- En los múltiplos de 3, la suma de sus cifras individuales también son múltiplos de dicho número.
- Los múltiplos de 5 terminan en 0 o en 5.
- Los múltiplos de 10, 100 y 1000 terminan en 0, 00, 000 y así sucesivamente.
- El uno es divisor de cualquier número.
- El cero no es divisor de ningún número.
- Todo número es múltiplo y divisor de sí mismo.

Los divisores comunes son aquellos que dividen a dos o más números al mismo tiempo. Tomemos como ejemplos el 10 y 25: los divisores del primero son 1, 2, 5 y 10; por su parte, 25 tiene a 1, 5 y 25. Entonces, los divisores comunes de estos números son 1 y 5. El máximo común divisor, mientras tanto, se refiere a la máxima cifra que divide a dos o más números; en el ejercicio anterior, corresponde a 5.

Observa el siguiente ejemplo.

- a. Encuentra los divisores de 30.

$30:1 = 30$
$30:2 = 15$
$30:3 = 10$
$30:4 = \text{NA}$
$30:5 = 6$
$30:6 = 5$
$30:30 = 1$

Tabla 3. Divisores de 30.

Para resolver este ejercicio debes recorrer los números naturales y hacer las divisiones necesarias. Al dividir 30 entre 1, 2 y 3 te habrás percatado de que obtienes cifras exactas; sin embargo, el 4 no sigue esta tendencia, así que no es divisor de 30. El 5 y el 6, por su parte, también arrojan enteros. Del 7 al 29 no encontramos ningún divisor de 30, pues el siguiente es el propio número. Esto nos da como resultado que los divisores del 30 son 1, 2, 3, 5, 6 y 30.

- b. Encuentra el máximo común divisor de 30 y 12.

$12:1 = 12$
$12:2 = 6$
$12:3 = 4$
$12:4 = 3$
$12:6 = 2$
$12:12 = 1$

Tabla 4. MCD de 30 y 12.

Ahora, debes encontrar todos los divisores de 12, los cuales son 1, 2, 3, 4, 6 y 12, ya que lo dividen exactamente. Por su parte, en el ejemplo anterior ya obtuviste los divisores de 30: 1, 2, 3, 5, 6 y 30. Entonces, los divisores de ambas cifras son 1, 2, 3 y 6; sin embargo, el ejercicio te pide encontrar el máximo común divisor. Observa que esta función la cumple el 6.

Factores primos

Una técnica efectiva para encontrar múltiplos comunes de varios números, así como el mínimo común múltiplo, consiste en identificar sus factores primos. Esta cualidad permite dividirlos, como se aprecia en el siguiente ejemplo:



Figura 1. MCM para 15, 10 y 12.

Presta atención a este procedimiento. Primero busca si hay algún número que divida exactamente a las 3 cifras; si no hay ninguno (como en el ejemplo) identifica el mayor que sí lo haga. En este caso, detente en el paso 1 y divide los números entre 5; te darás cuenta de que el 15 y el 10 se dividen de manera precisa, pero el 12 no. En el paso 2, podemos dividir de nuevo, ahora entre 3, que sirve para 15 y 12, pero no para 10. En el paso 3, mientras tanto, se obtiene que las tres cifras se pueden dividir entre 2. Por tanto, en el paso 4 tendrás que realizar esa misma operación. El resultado del MCM se define como la multiplicación de los factores primos, los cuales calculaste en la columna de la derecha: $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 60$. Esta cantidad será el mínimo común múltiplo.

Descomponer en factores primos también te ayudará a encontrar el MCD. Observa el siguiente ejemplo:

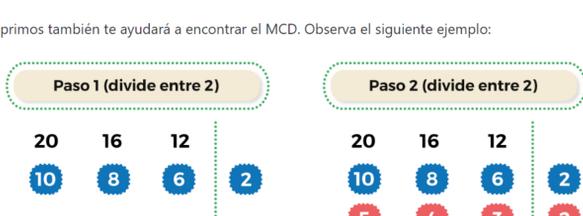


Figura 2. MCD para 20, 16 y 12.

El común divisor para los tres números es 2, ya que los divide exactamente. Lo mismo ocurre en el segundo paso, cuando efectúas la operación con 10, 8 y 6. El resultado de este último procedimiento ya no permite replicar la división, entonces el MCD de 20, 16 y 12 se obtiene al multiplicar $2 \cdot 2$, es decir, 4. Por tanto, las tres cifras resultan divisibles entre 4.

Cierre

A lo largo de este tema apreciaste la diferencia entre dos conceptos de aritmética básica: múltiplos y divisores. Aunque ambos llegan a confundirse un poco, ya que se comportan de manera similar y representan a un número mediante otro, una vez analizados son fáciles de identificar y, sobre todo, de encontrarse en el mundo real. En este sentido, recuerda que su comprensión resulta indispensable para el desarrollo de problemas más complejos. De la misma manera, aprendiste cómo se obtiene el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo, los cuales también ofrecen características únicas para entender mejor el funcionamiento de los números.

Checkpoint

Asegúrate de:

- Entender el concepto de múltiplo para calcularlo en escenarios de múltiples números.
- Aplicar el concepto de divisor para calcularlo en escenarios de múltiples números.
- Aplicar la descomposición de factores primos para obtener el MCD y MCM en ejercicios donde intervengan varios números.

Bibliografía

- Clarín. (2022). *Múltiplos y Divisores: la lista completa con múltiplos y divisores comunes*. Recuperado de https://www.clarin.com/viste/multiplos-divisores-lista-completa-multiplos-divisores_0_a20STJHesL.html
- Calvo, B. (2023). *Mínimo común múltiplo: qué es y cómo sacarlo*. Recuperado de <https://www.mundodeportivo.com/uncom/educacion/articulo/minimo-comun-multiplo-que-es-y-como-sacarlo-53122.html>

La obra presentada es propiedad de ENSEÑANZA E INVESTIGACIÓN SUPERIOR A.C. (UNIVERSIDAD TECMILENIO), protegida por la Ley Federal de Derechos de Autor; la alteración o deformación de una obra, así como su reproducción, exhibición o ejecución pública sin el consentimiento de su autor y titular de los derechos correspondientes es constitutivo de un delito tipificado en la Ley Federal de Derechos de Autor, así como en las Leyes Internacionales de Derecho de Autor.

El uso de imágenes, fragmentos de videos, fragmentos de eventos culturales, programas y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, es exclusivamente para fines educativos e informativos, y cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por UNIVERSIDAD TECMILENIO.

Queda prohibido copiar, reproducir, distribuir, publicar, transmitir, difundir, o en cualquier modo explotar cualquier parte de esta obra sin la autorización previa por escrito de UNIVERSIDAD TECMILENIO. Sin embargo, usted podrá bajar material a su computadora para uso exclusivamente personal o educativo y no comercial limitado a una copia por página. No se podrá remover o alterar de la copia ninguna leyenda de Derechos de Autor o la que manifieste la autoría del material.