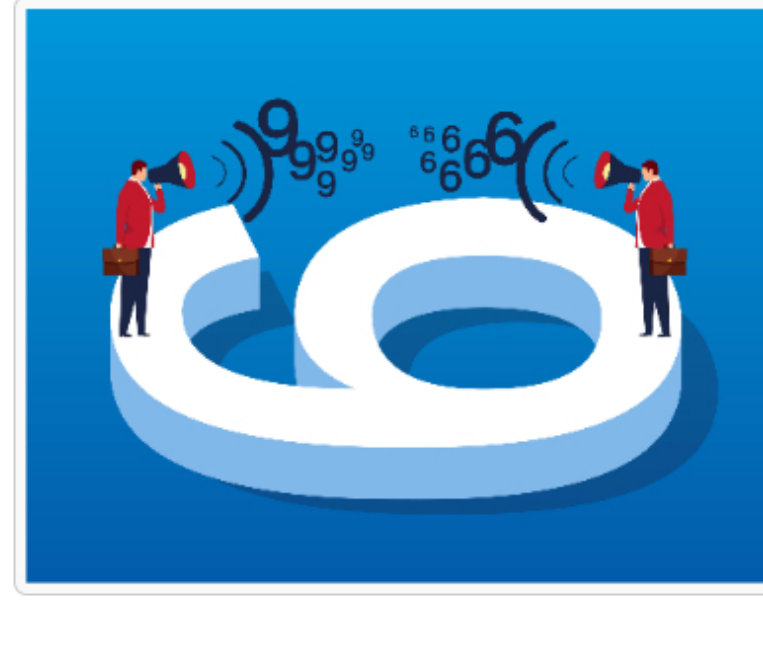


Tema 3. Sentido numérico

Introducción



Existen ecuaciones matemáticas con más de una solución; por ejemplo, para ingresar al club avanzado de ajedrez, es necesario tener por lo menos 12 años, es decir, $x \geq 12$. Durante esta experiencia educativa aprenderás a resolver ejercicios donde no existe una igualdad, conocidos como inecuaciones. También abordarás la simplificación de expresiones algebraicas, las razones trigonométricas y el cálculo de áreas de figuras geométricas. Finalmente, aprenderás a calcular la desviación estándar y la media aritmética de un conjunto de datos.

Explicación

Inecuaciones lineales

Cuando una ecuación lineal tiene más de una solución, se puede expresar como una inecuación lineal, es decir, como una desigualdad. Por este motivo, en lugar de escribirse con el signo =, tendrá en su estructura otros símbolos:

Símbolo	Significado
$>$	Mayor que.
$<$	Menor que.
\geq	Mayor o igual que.
\leq	Menor o igual que.

Tabla 1. Tabla de desigualdades.

Las inecuaciones se resuelven de la misma manera que una ecuación lineal: despejando términos de un lado a otro de la inecuación; sin embargo, habrá más de una posibilidad para el resultado.

Ejemplo. Resuelve esta operación: $5x - 2 \leq 2x + 13$.

Paso 1. Se agrupan los términos semejantes: $5x - 2x \leq 13 + 2$.

Paso 2. Se reducen términos: $3x \leq 15$.

Paso 3. Se despeja la variable: $x \leq \frac{15}{3}$.

Paso 4. Se resuelve la división: $x \leq 5$.

Paso 5. Se comprueba el resultado obtenido. En este caso, 5 o cualquier número menor a él es una solución para esta inecuación.

Si $x = 5$, que es el valor máximo encontrado, sustituimos:

$$\begin{aligned}5(5) - 2 &\leq 2(5) + 13 \\25 - 2 &\leq 10 + 13 \\23 &\leq 23\end{aligned}$$

En el ejemplo anterior, observamos que la desigualdad sí se cumple. Si $x > 5$, por ejemplo, $x = 6$, la inecuación no se cumpliría, ya que el término del lado izquierdo es mayor que el del derecho.

Simplificación de expresiones algebraicas

Una expresión algebraica es la representación de una situación, problema, ecuación, análisis, entre otros asuntos. Al igual que en la vida diaria, se deben simplificar los problemas a su forma más sencilla, pues así serán más fáciles de comprender y solucionar (Castañeda, Barrios y Gutiérrez, 2020).

Para simplificar expresiones algebraicas es importante atender algunas reglas básicas:

Regla 1. Aplicar leyes de los exponentes cuando se requieran.

Regla 2. Respetar la jerarquía de las operaciones, en el siguiente orden: 1) paréntesis, 2) exponentes y radicales, 3) multiplicación y división, 4) sumas y restas.

Regla 3. Agrupar y reducir términos semejantes.

Regla 4. Los términos semejantes son aquellos que tienen la misma base literal y el mismo exponente.

Ejemplo. ¿De qué otra forma se puede representar la expresión $5x^2 + (x + 2)^2$?

Paso 1. Usando la jerarquía de operaciones se desarrolla el binomio al cuadrado:

$$\begin{aligned}5x^2 + (x + 2)^2 \\5x^2 + (x + 2)(x + 2)\end{aligned}$$

Paso 2. Resolver la multiplicación de los paréntesis:

$$5x^2 + x^2 + 2x + 2x + 4$$

Paso 3. Reducir términos semejantes:

$$6x^2 + 4x + 4$$

La ecuación ya no puede simplificarse más, así que ese es el resultado.

Razones trigonométricas

Las razones trigonométricas son las relaciones que existen entre los lados y los ángulos de un triángulo. Su principal función es ayudar a encontrar un valor faltante (Collins, 2020).

En la figura 1, se observa un triángulo rectángulo con una hipotenusa (h), o lado más largo, y dos catetos, lados que forman un ángulo de 90° . Estos últimos se dividen en cateto opuesto (CO), lado que proyecta el ángulo, y cateto adyacente (CA), lado que toca al ángulo de estudio. Como referencia se toma el ángulo α .

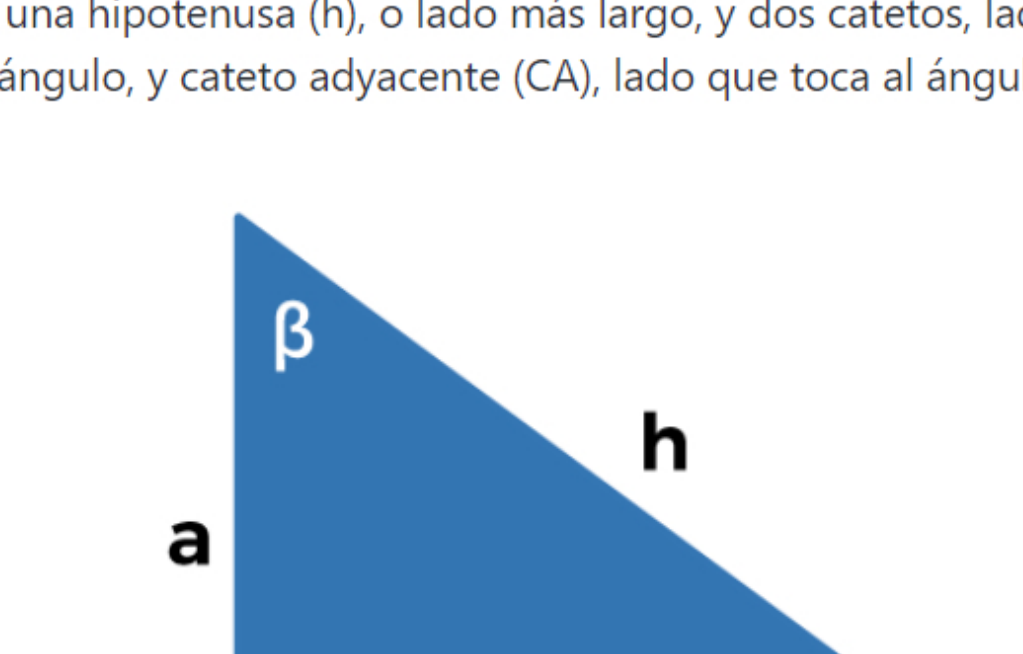


Figura 1. Triángulo rectángulo.

Las razones trigonométricas son:

$$\text{sen} = \frac{\text{CO}}{h} \quad \text{cos} = \frac{\text{CA}}{h} \quad \text{tan} = \frac{\text{CO}}{\text{CA}} \quad \text{csc} = \frac{h}{\text{CO}} \quad \text{sec} = \frac{h}{\text{CA}} \quad \text{cot} = \frac{\text{CA}}{\text{CO}}$$

Para un mejor entendimiento, se toma como referencia el ángulo α de la figura. Entonces:

$$\text{sen} \alpha = \frac{a}{h} \quad \text{cos} \alpha = \frac{b}{h} \quad \text{tan} \alpha = \frac{a}{b}$$

Ejemplo. En la figura 2, ¿cuál es la longitud de los catetos a y b ?

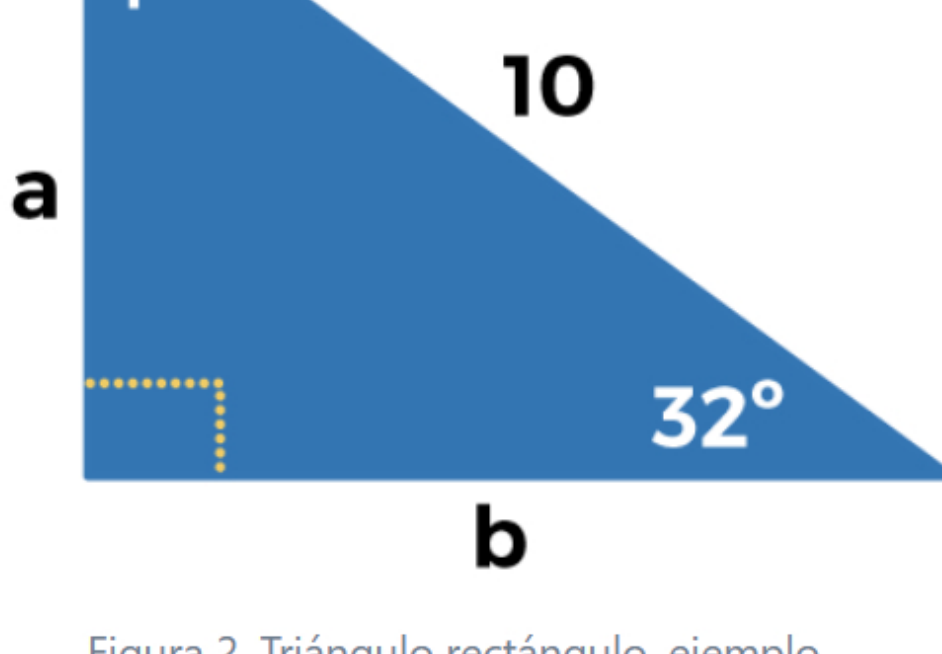


Figura 2. Triángulo rectángulo, ejemplo.

Como habrás observado, de la figura 2 se conoce el valor de la hipotenusa ($h = 10$) y del ángulo ($\alpha = 32^\circ$). Ahora, hay que seguir una serie de pasos.

Paso 1. Elegir la fórmula para calcular el cateto opuesto (a): $\text{sen} \alpha = \frac{a}{h}$.

Paso 2. Sustituir los datos en la fórmula: $\text{sen} 32^\circ = \frac{a}{10}$.

Paso 3. Despejar la incógnita y resolver:

$$\begin{aligned}a &= (\text{sen} 32^\circ)(10) \\a &= (0.53)(10) \\a &= 5.3\end{aligned}$$

Paso 4. Calcular el cateto adyacente (b) con la siguiente fórmula: $\text{cos} \alpha = \frac{b}{h}$.

Paso 5. Sustituir los datos de la fórmula: $\text{cos} 32^\circ = \frac{b}{10}$.

Paso 6. Despejar la incógnita y resolver:

$$\begin{aligned}b &= (\text{cos} 32^\circ)(10) \\b &= (0.85)(10) \\b &= 8.5\end{aligned}$$

Para comprobar si tus resultados son correctos, puedes usar el teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$.

Área

El área de un objeto o figura corresponde a la superficie que ocupa; sus unidades son las de longitud elevadas al cuadrado (Collins, 2020).

Ejemplo 1. ¿Cuál es el área de la figura 3?

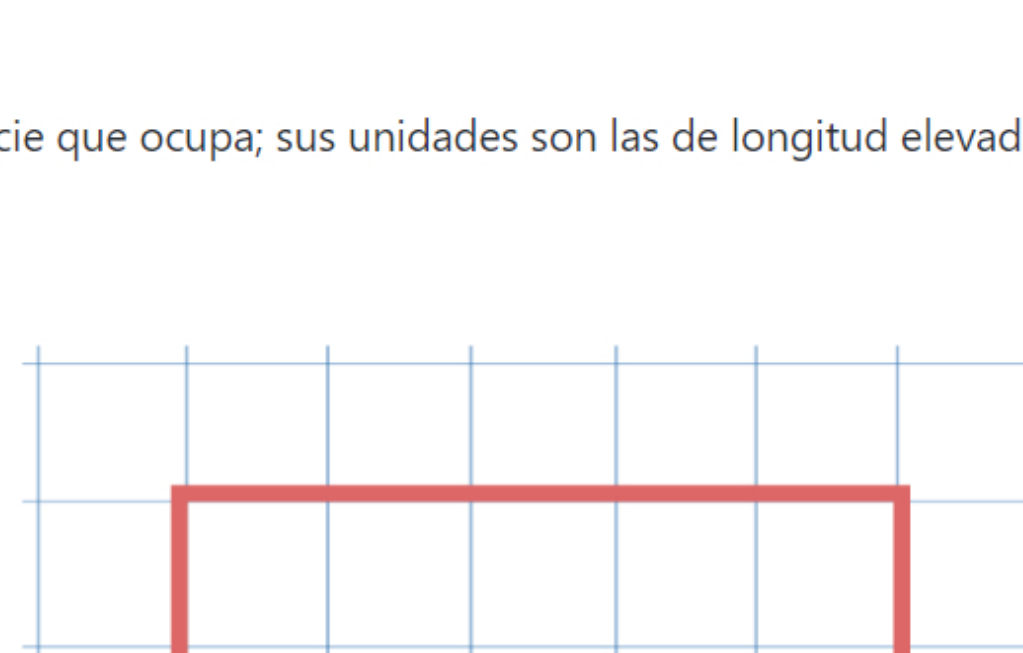


Figura 3. Rectángulo.

El área de un rectángulo se calcula con la fórmula: $A = b \cdot h$.

Al sustituir con los datos del ejemplo, resulta que son 5 unidades de base y 3 de altura:

$$A = (5)(3) = 15 \text{ unidades}$$

El resultado es muy fácil de comprobar, pues si contamos los cuadrados dentro del rectángulo serán 15. Esto ocurre porque se tomó una escala de 1 cuadro por unidad.

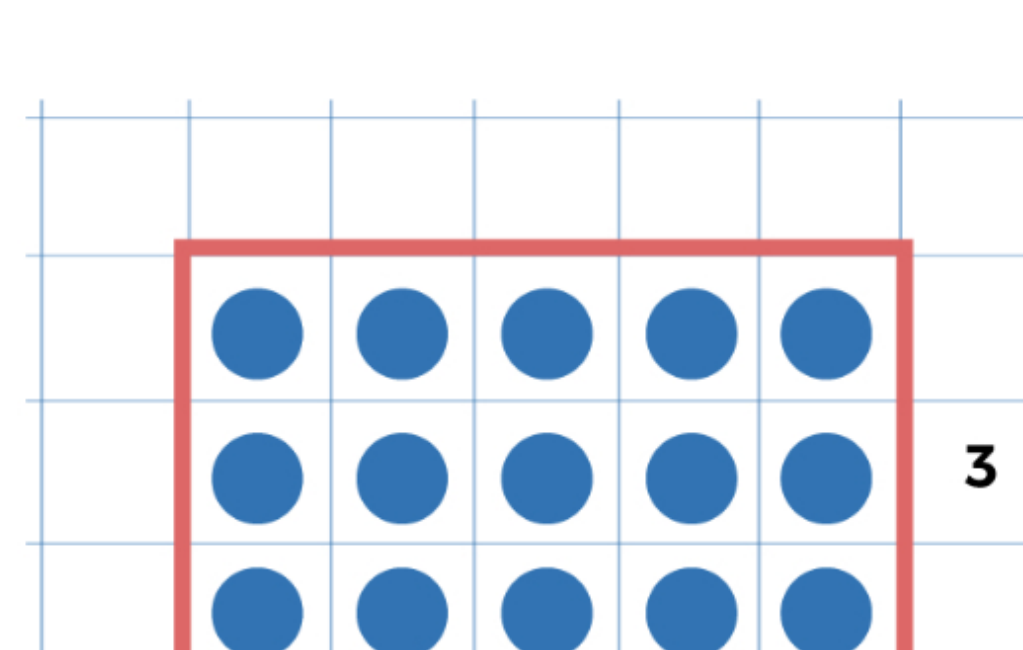


Figura 4. Área del rectángulo.

Ejemplo 2. ¿Cuál es el área sombreada de la figura 5?

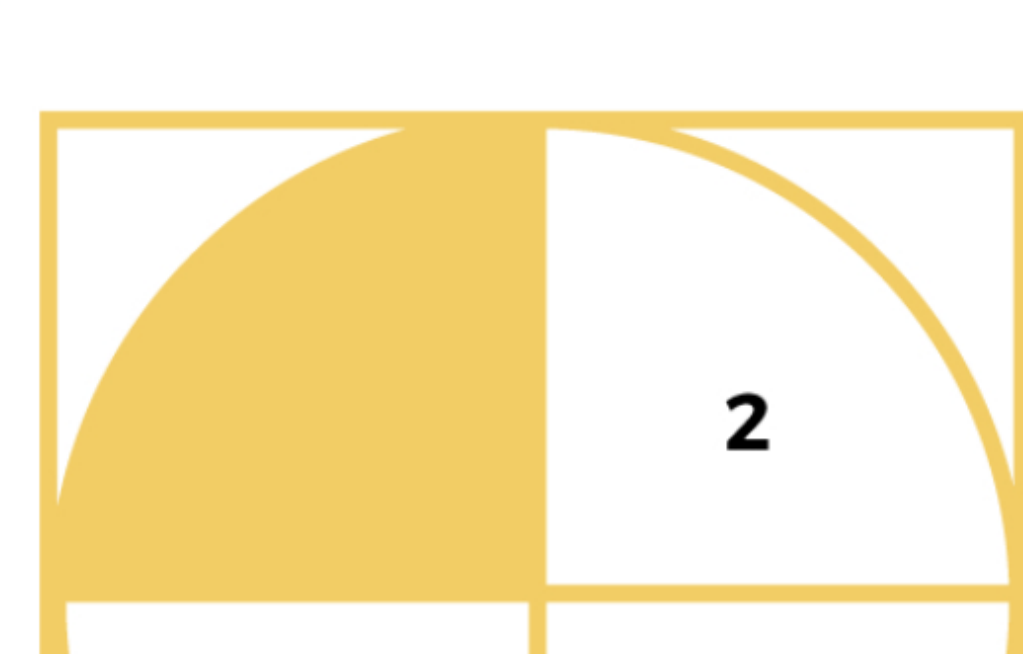


Figura 5. Área sombreada.

Tenemos un círculo con radio de 2 inscrito en un cuadrado. Observa que las áreas sombreadas forman un cuadrado de lado 2. Por tanto, el área sombreada se calcula de esta manera:

$$\begin{aligned}A &= 1 \cdot 1 \\A &= (2)(2) = 4\end{aligned}$$

Media aritmética

Alguna vez te has preguntado, ¿cómo obtienen tu calificación final los profesores? La forma más sencilla de hacerlo es considerando las calificaciones que mereciste a lo largo del curso. El promedio o media aritmética es el resultado de sumar todos los datos y dividirlos entre el total de observaciones.

$$\text{En } \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \quad x_i \text{ representa a cada dato y } n \text{ al número total de los mismos.}$$

Ejemplo. Encuentra la media aritmética del tiempo en segundos que tardan ocho personas en resolver un problema matemático sencillo.

Los tiempos son 8, 10, 9, 5, 9, 7, 12 y 6.

La operación se formularía de esta manera:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{8 + 10 + 9 + 5 + 9 + 7 + 12 + 6}{8} = \frac{66}{8} = 8.25$$

En conclusión, el tiempo promedio que tardan las ocho personas en resolver un problema matemático sencillo es de 8.25 segundos.

Desviación estándar

En términos matemáticos, la desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza. En análisis de datos, por su parte, se define como la dispersión de los datos con respecto al promedio (Álvarez y Romero, 2019).

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

En la ecuación anterior, s^2 representa a la varianza; x_i , a cada dato del conjunto; \bar{x} , al promedio o media aritmética; y n , al total de datos. La desviación estándar se calcula de esta manera:

$$s = \sqrt{s^2}$$

Ejemplo. Encuentra la desviación estándar de este conjunto de datos: 2, 5, 6, 8, 9.

Paso 1. Calcular la media aritmética:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{2 + 5 + 6 + 8 + 9}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

Paso 2. Calcular la varianza:

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(2-6)^2 + (5-6)^2 + (6-6)^2 + (8-6)^2 + (9-6)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{(-4)^2 + (-1)^2 + (0)^2 + (2)^2 + (3)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{16 + 1 + 0 + 4 + 9}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

Paso 3. Calcular la desviación estándar, es decir, obtener la raíz cuadrada de la varianza:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{6} = 2.45$$

Los datos tienen una desviación estándar o dispersión de 2.45 con respecto a la media aritmética de 6.

Tecmileno no guarda relación alguna con las marcas mencionadas como ejemplo. Las marcas son propiedad de sus titulares conforme a la legislación aplicable, se utilizan con fines académicos y didácticos, por lo que no existen fines de lucro, relación publicitaria o de patrocinio.

Cierre

En este tema aprendiste a calcular promedios y su dispersión, herramientas de mucha utilidad en el análisis de datos. Exploraste las razones trigonométricas, obtuviste datos faltantes de triángulos rectángulos, resolviste desigualdades matemáticas y calculaste áreas de figuras geométricas.

Checkpoint

Asegúrate de:

- Reconocer las fórmulas para el cálculo de las áreas de las figuras geométricas y para las razones trigonométricas, con el objetivo de determinar áreas, ángulos y lados faltantes.
- Comprender los conceptos relacionados con la media aritmética, como el promedio y la desviación (dispersión del conjunto de datos), para realizar análisis e interpretación de información.

Bibliografía

- Álvarez, I., y Romero, V. (2019). *Enseñanza e aprendizaje de la estadística y la probabilidad. Propuesta de intervención para el aula*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Castañeda, S., Barrios, A., y Gutiérrez, I. (2020). *Manual de álgebra lineal* (2a ed.). Colombia: Universidad del Norte.
- Collins, J. (2020). *Geometría y trigonometría. Cuaderno de trabajo*. México: ALEC.

La obra presentada es propiedad de ENSEÑANZA E INVESTIGACIÓN SUPERIOR A.C. (UNIVERSIDAD TECMILENIO), protegida por la Ley Federal de Derecho de Autor, la alteración o deformación de una obra, así como su reproducción, exhibición o ejecución pública sin el consentimiento de su autor y titular de los derechos correspondientes es constitutivo de un delito tipificado en la Ley Federal de Derechos de Autor, así como en las Leyes Internacionales de Derecho de Autor.

El uso de imágenes, fragmentos de videos, fragmentos de eventos culturales, programas y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, es exclusivamente para fines educativos e informativos, y cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el UNIVERSIDAD TECMILENIO.

Queda prohibido copiar, reproducir, distribuir, publicar, transmitir, difundir, o en cualquier modo explotar cualquier parte de esta obra sin la autorización previa por escrito de UNIVERSIDAD TECMILENIO. Sin embargo, usted podrá bajar material a su computadora personal para uso exclusivamente personal o educacional y no comercial limitado a una copia por página. No se podrá remover o alterar de la copia ninguna leyenda de Derechos de Autor o la que manifieste la autoría del material.