Tema 4. Desarrollo de usos

Introducción

En este tema abordarás el uso de gráficos, medidas centrales y de dispersión para representar e interpretar información en diferentes casos de estudio. Aprenderás cómo se grafica una ecuación de segundo grado, también denominada ecuación cuadrática, e identificarás su comportamiento. Asimismo, revisarás las relaciones trigonométricas para su aplicación en problemas matemáticos.

Explicación

Representación gráfica de ecuaciones de segundo grado

Las ecuaciones de segundo grado, también conocidas como ecuaciones cuadráticas, se distinguen de las lineales porque su estructura posee un término elevado al cuadrado, por ejemplo, x^2. Esto significa que al resolver la ecuación se tendrán dos raíces para el valor de x.

Al representar una ecuación de segundo grado en una gráfica, encontrarás las soluciones en las intersecciones de la curva con respecto al eje *x*.

Observa el siguiente ejemplo:

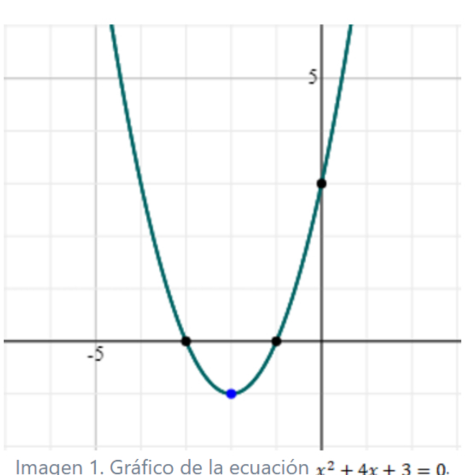

Imagen 1. Gráfico de la ecuación $x^2 + 4x + 3 = 0$.
Esta pantalla se obtuvo directamente del software que se está explicando en la computadora, para fines educativos.

El gráfico de la pantalla 1 corresponde a la ecuación $x^2 + 4x + 3 = 0$, pero ¿cuáles son sus soluciones?

Paso 1. Observa detenidamente la gráfica.
Paso 2. Identifica las intersecciones de la curva con el eje *x*.
Paso 3. Las soluciones son los puntos de intersección, en otras palabras, $x_1 = -3$ y $x_2 = -1$.

Comportamiento gráfico de funciones cuadráticas

Las ecuaciones cuadráticas gráficamente representan una parábola, es decir, una curva con un vértice o centro desde el que se abren hacia el infinito sin tocarse nunca. Estas curvas pueden estar orientadas hacia arriba (eje $+y$) o hacia abajo (eje $-y$).

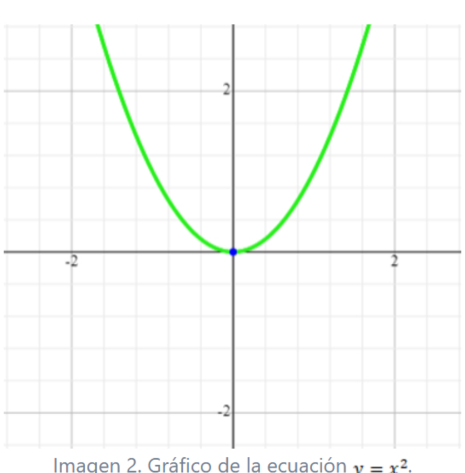

Imagen 2. Gráfico de la ecuación $y = x^2$.
Esta pantalla se obtuvo directamente del software que se está explicando en la computadora, para fines educativos.

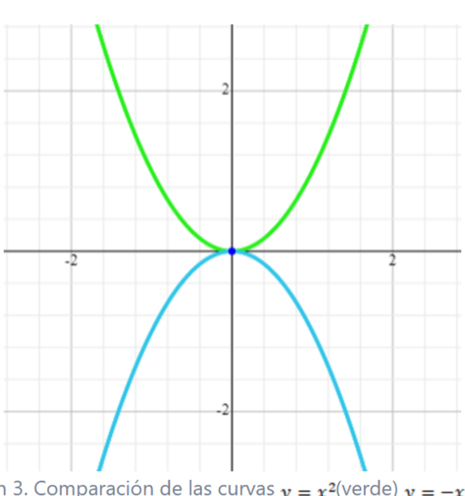

Imagen 3. Comparación de las curvas $y = x^2$(verde) $y = -x^2$(azul).
Esta pantalla se obtuvo directamente del software que se está explicando en la computadora, para fines educativos.

La pantalla 2 corresponde al gráfico de la ecuación $y = x^2$, así que se trata de una parábola que abre hacia arriba; sin embargo, cuando se cambia el signo, de x^2 a $-x^2$, también lo hace el sentido de la curva, que ahora se desplaza hacia abajo. En el gráfico de la pantalla 3 se comparan ambas curvas.

A continuación, observa el comportamiento de los gráficos al agregar un dato más a la ecuación; para este ejemplo, se sumará y restará 1 de la ecuación $y = x^2$, es decir, quedará como $y = x^2 \pm 1$.

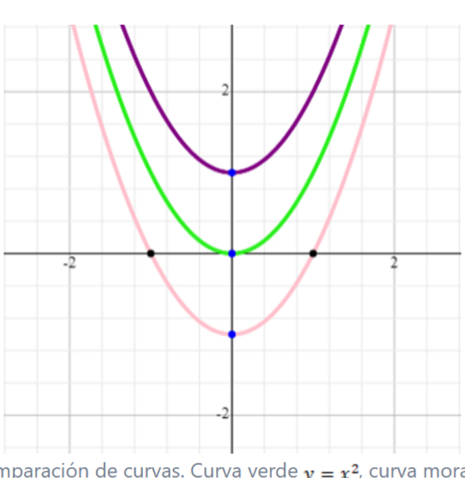

Imagen 4. Comparación de curvas. Curva verde $y = x^2$, curva morada $y = x^2 + 1$, curva rosa $y = x^2 - 1$.
Esta pantalla se obtuvo directamente del software que se está explicando en la computadora, para fines educativos.

Cuando se incrementa una unidad en la ecuación, la función se desplaza en una posición sobre el eje $+y$; mientras tanto, si se resta el mismo valor, se traslada una posición hacia $-y$.

Es momento de observar el comportamiento de las funciones en forma de binomio al cuadrado, es decir, con la fórmula $y = (a + b)^2$.

En esta clase de ecuaciones, el desplazamiento a la derecha indica una resta en la ecuación (curva rosa), mientras que a la izquierda se expresa en forma de suma (curva azul).

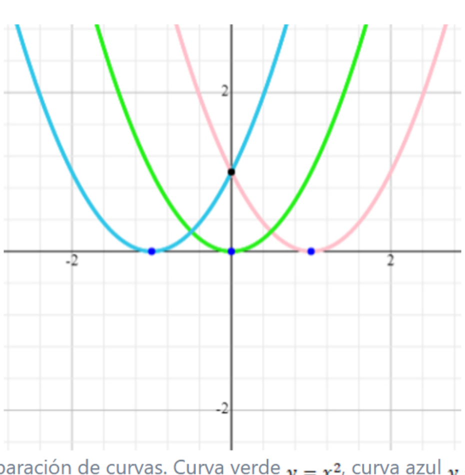

Imagen 5. Comparación de curvas. Curva verde $y = x^2$, curva azul $y = (x + 1)^2$, curva rosa $y = (x - 1)^2$.
Esta pantalla se obtuvo directamente del software que se está explicando en la computadora, para fines educativos.

Relaciones trigonométricas

Las relaciones trigonométricas permiten encontrar los valores faltantes de un triángulo a partir de la dependencia existente entre sus lados y ángulos (Collins, 2020). Las relaciones trigonométricas son las siguientes:

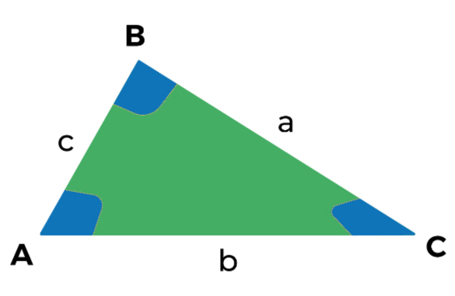

Figura 1. Triángulo.

- Ley de senos
  Indica que cada uno de los lados pertenecientes a un triángulo es directamente proporcional al seno de su ángulo opuesto.

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

- Ley de cosenos
  Establece que, en los triángulos, el cuadrado de un lado resulta equivalente a la suma de los cuadrados de los dos lados restantes, menos dos veces el producto de estos dos lados multiplicados por el coseno del ángulo que forman.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(cosA)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac(cosB)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab(cosC)$$

Ejemplo. Encuentra el valor del lado *a* y el ángulo *B* de la figura 2.

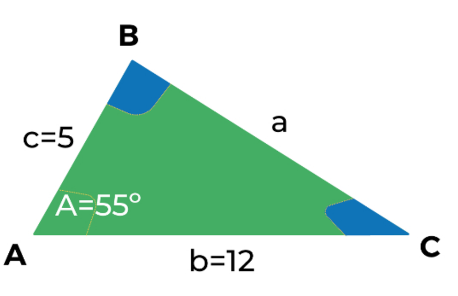

Figura 2. Triángulo de ejemplo.

Paso 1. Se elige la ley de cosenos, ya que se conoce el ángulo *A* y el valor de los lados que lo forman (*b* y *c*).

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(cosA)$$

Paso 2. Sustituir los datos en la fórmula y resolver:

$$a^2 = (12)^2 + (5)^2 - 2(12)(5)(cos55)$$
$$a^2 = 144 + 25 - 120(0.57)$$
$$a^2 = 169 - 68.4$$
$$a^2 = 100.6$$
$$a = \sqrt{100.6}$$
$$a = 10.02$$

Paso 3. Se elige la ley de senos para encontrar el valor del ángulo *B*.

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB}$$

Paso 4. Se sustituyen los datos y se resuelve la ecuación, despejando $senB$:

$$\frac{10.02}{sen55} = \frac{12}{senB}$$

$$10.02(senB) = 12(sen55)$$

$$senB = \frac{12(sen55)}{10.02} = \frac{12(0.82)}{10.02} = \frac{9.84}{10.02}$$

$$senB = 0.98$$

$$B = sen^{-1}(0.98)$$

$$B = 78.52°$$

Representación gráfica de información

Una forma sencilla de analizar información es mediante el uso de gráficos. La información que se presenta en ellos puede variar dependiendo del objeto o caso de estudio, aunque lo más común es representar frecuencias, medidas centrales y porcentajes (Álvarez y Romero, 2019).

La información representada en la figura 3 muestra los porcentajes de automóviles vendidos en México, por marca, durante el año 2020.

Figura 3. Porcentaje de autos vendidos en México durante el año 2020.
Fuente: Mendoza, S. (2021). *Las marcas y los autos más vendidos en México en la primera mitad de 2020.* Recuperado de https://automexico.com/industria/marcas-y-autos-mas-vendidos-mexico-2020-aid9155

Pregunta. Si la cantidad total de autos vendidos fue de 436,445 unidades, ¿cuántos automóviles vendió Toyota?

Para resolver este ejercicio, debes comparar el total de autos vendidos con el porcentaje de autos vendidos por Toyota:

$$436{,}445\ autos - 100\%$$
$$x\ autos - 8.5\ \%$$

$$x = \frac{(436{,}445\ autos)(8.5\%)}{(100\%)} = 37{,}098\ autos$$

En conclusión, el uso de gráficos para representar información facilita la comprensión y visualización del objeto de estudio.

Medidas de tendencia central y de dispersión

Las denominadas medidas de tendencia central reciben ese nombre debido a que, en un conjunto ordenado de datos, estarán presentes justo al centro de la muestra (Álvarez y Romero, 2019).

- Media aritmética: se conoce con este nombre al promedio de un conjunto de datos.
- Mediana: se trata del dato central en un conjunto de datos ordenados en forma ascendente.
- Moda: representa el elemento o grupo de datos que tiende a repetirse más veces en el conjunto.

Ejemplo. Con el conjunto de datos mostrado a continuación determina la media aritmética, mediana y moda.

12, 14, 18, 6, 10, 6, 14, 16, 14, 10, 12

Media aritmética: $\bar{x} = \frac{12+14+18+6+10+6+14+16+14+10+12}{11} = \frac{132}{11} = 12$

Mediana:

Paso 1. Los elementos del conjunto se deben ordenar de manera ascendente:

6, 6, 10, 10, 12, 12, 14, 14, 14, 16, 18

Paso 2. Se elimina un dato del inicio y otro del final; la acción se repite hasta llegar al centro del conjunto trabajado:

~~6~~, 6, 10, 10, 12, 12, 14, 14, 14, 16, ~~18~~
~~6, 6,~~ 10, 10, 12, 12, 14, 14, 14, ~~16, 18~~
~~6, 6, 10, 10, 12,~~ 12, ~~14, 14, 14, 16, 18~~

Paso 3. Se selecciona el dato de la mitad como mediana, en este caso 12.

Nota. Cuando se tiene un conjunto de datos par, al centro quedarán 2 números; en dichas circunstancias, la mediana se obtiene sumándolos y dividiendo el resultado entre 2.

Moda. En el conjunto de datos ordenados se puede visualizar el dígito que se repite más veces; en el ejemplo, 14 aparece con mayor frecuencia.

6, 6, 10, 10, 12, 12, 14, 14, 14, 16, 18

Las medidas de dispersión reciben este nombre porque permiten observar y analizar la variación que experimentan los datos de un conjunto. A continuación, se explican cuáles son dichas medidas.

- Rango. Se determina a través de la resta del valor máximo y el mínimo pertenecientes a un mismo conjunto.
- Varianza. Es el cociente de la suma elevada al cuadrado de cada dato, menos la media aritmética y dividido entre el total de elementos de un conjunto.
- Desviación estándar. Se calcula aplicando una raíz cuadrada a la varianza de un conjunto.

Ejemplo. Determina rango, varianza y desviación estándar del siguiente conjunto de datos:

12, 14, 18, 6, 14, 8, 14, 10

Rango

Paso 1. Ordena de manera ascendente los elementos del conjunto:

6, 8, 10, 12, 14, 14, 14, 18

Paso 2. Identifica el valor máximo y el mínimo del conjunto:

6, 8, 10, 12, 14, 14, 14, 18

Paso 3. Calcula la diferencia entre ambos valores:

$$Rango = 18 - 6 = 12$$

Varianza. Para realizar este cálculo necesitas conocer la media aritmética o promedio del conjunto.

Paso 1. Calcula la media aritmética del conjunto:

$$\bar{x} = \frac{6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 14 + 14 + 18}{8} = \frac{96}{8} = 12$$

Paso 2. Calcula la varianza a partir de la suma del cuadrado de cada dato, menos la media y dividiendo el resultado entre el total de elementos del conjunto:

$$s^2 = \frac{(6-12)^2 + (8-12)^2 + (10-12)^2 + (12-12)^2 + (14-12)^2 + (14-12)^2 + (14-12)^2 + (18-12)^2}{8}$$

$$s^2 = \frac{(-6)^2 + (-4)^2 + (-2)^2 + (0)^2 + (2)^2 + (2)^2 + (2)^2 + (6)^2}{8}$$

$$s^2 = \frac{36 + 16 + 4 + 0 + 4 + 4 + 4 + 36}{8} = \frac{104}{8} = 13$$

Desviación estándar. Es la raíz cuadrara de la varianza:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{13} = 3.61$$

Cierre

En este tema aprendiste a calcular las medidas centrales y de dispersión para identificar y analizar el comportamiento de un conjunto de datos, así como a interpretar gráficos de frecuencias para obtener información relevante de un caso de estudio. También comprendiste cómo representar y entender el comportamiento de los gráficos de ecuaciones de segundo grado; asimismo, resolviste problemas que implican el uso de las relaciones trigonométricas.

Checkpoint

Asegúrate de:

- Analizar los gráficos de frecuencias antes de realizar cálculos para obtener la información requerida y hacer uso correcto de la información.
- Comprender el comportamiento de una ecuación cuadrática de acuerdo con su ecuación para facilitar su interpretación en problemas de cálculos matemáticos.

Bibliografía

- Álvarez, I., y Romero, V. (2019). *Enseñanza y aprendizaje de la estadística y la probabilidad. Propuesta de intervención para el aula*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Collins, J. (2020). *Geometría y trigonometría. Cuaderno de trabajo*. México: ALEC.
- Mendoza, S. (2021). *Las marcas y los autos más vendidos en México en la primera mitad de 2020.* Recuperado de https://automexico.com/industria/marcas-y-autos-mas-vendidos-mexico-2020-aid9155