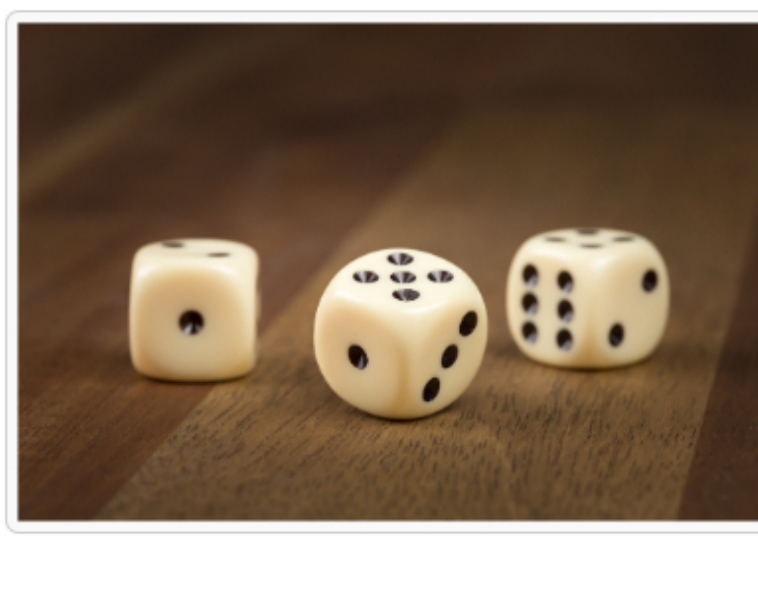


Tema 5. Cálculo de la probabilidad

Introducción

Ordenar datos, números o cualquier otro elemento necesario en un experimento resulta indispensable para plantear y visualizar soluciones apropiadas en escenarios reales, ya que identificar cuándo permutan (varían) o se combinan los hace más fáciles de resolver.

Además, comprender la aplicación de estos conceptos y cómo se fundamentan en el cálculo de probabilidades es parte esencial de su proceso. En este tema, aprenderás algunas nociones básicas del cálculo de probabilidades y examinarás ejemplos donde se aplican.



Explicación

Factorial de un número

El factorial de un número representa su multiplicación consecutiva desde sí hasta n ; por ejemplo, el factorial de 5 es $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Este procedimiento se denota con el símbolo $!$, así que el factorial de 4 es $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

En este sentido, el factorial de 0 y 1 siempre será 1.

$$0! = 1$$
$$1! = 1$$

Permutaciones, ordenaciones y variaciones

Técnicas de conteo

Las técnicas de conteo son un conjunto de herramientas matemáticas utilizadas para determinar el número de formas posibles en las que puede suceder un evento. Estas técnicas son fundamentales en la teoría de la probabilidad, se aplican en una amplia variedad de problemas y se retoman en distintos campos de estudio, como en estadística, informática, física y biología. A continuación, se presentan y explican algunas de estas herramientas matemáticas.

- Principio fundamental del conteo. Según este principio, si un evento puede suceder de m maneras distintas y otro de n maneras distintas, entonces ambos pueden acontecer juntos de $m \cdot n$ maneras distintas.

Un ejemplo común de este principio es el siguiente: si deseas comprar una camisa y un pantalón en una tienda de ropa que ofrece cinco opciones de la primera prenda y cuatro de la segunda, el principio fundamental del conteo establece que se puede elegir una camisa y un pantalón de $5 \cdot 4 = 20$ maneras distintas. Esto significa que hay 20 combinaciones posibles para adquirir en la tienda.

- Permutaciones. De acuerdo con Reyes (2022), hacer grupos u ordenar elementos, sobre todo del espacio muestra, resulta crucial para tener más claros los planteamientos de los ejercicios o problemas. Una de las maneras de hacer esto se da mediante la resolución de permutaciones; por ejemplo, si te preguntan ¿de cuántas maneras se pueden conseguir los tres primeros lugares en la Copa Mundial de la FIFA Qatar 2022? Para encontrar la respuesta, primero debes saber cuántos países compiten; en este fueron 32 selecciones de fútbol. Entre ellas, se repartirán las tres posiciones más anheladas: primero, segundo y tercer lugar.

32	31	30
1	2	3

Tabla 1. Primeros tres lugares.

Cualquiera de las 32 naciones participantes puede ocupar el primer lugar; por tanto, para el segundo solo restan 31 y para el tercero 30. El cálculo se realiza de esta manera:

$$P_{(n,p)} = 32 \cdot 31 \cdot 30 = 29,760 \text{ maneras diferentes de otorgar los 3 lugares.}$$

Ahora, examina la siguiente pregunta: ¿de cuántas maneras puedes organizar cinco libros románticos en un librero de cinco espacios?

$$\text{Libros} = \{A, B, C, D, E\}$$

Si tienes cinco libros para cinco espacios, en el primero puedes depositar cualquiera de los libros; en el segundo, uno de los cuatro restantes y así sucesivamente hasta agotarlos.

$$P_{(n,p)} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{5}{24} = 0.21$$

= 21% de probabilidad de obtener una pelota morada o roja.

Esta es la primera fórmula:

$$P_{(n,p)} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Donde:

P = Permutaciones.

n = Cantidad de elementos.

p = Orden que se requiere.

En el ejemplo del mundial, la fórmula quedaría así:

$$P_{(32,3)} = \frac{32!}{(32-3)!} = \frac{32!}{29!} = 29,760 \text{ maneras}$$

Si observas, $n = 32$ países es el total de selecciones que compiten y $p = 3$ los lugares a conseguir; con esta información, se establece y resuelve la fórmula.

En el caso de los cinco libros, la fórmula se expresa de esta manera:

$$P_{(n,p)} = \frac{n!}{(n-p)!}$$
$$P_{(5,5)} = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!} = 5! = 120 \text{ maneras}$$

- Combinaciones. No siempre es importante el orden al momento de clasificar u ordenar datos; por ejemplo, imagina que en tu salón de clase hay 20 alumnos y en la materia de Probabilidad se forman equipos de cuatro personas, es decir, habrá cinco equipos. ¿De cuántas maneras se pueden integrar?

$$C_{(n,p)} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

Observa con detenimiento la fórmula, resulta crucial que la entiendas porque te dará la pauta para identificar cuándo se permuta o se combina. Las combinaciones son agrupamientos en los que no importa el orden; por ejemplo, al conformar los equipos da lo mismo si primero eligen a Pedrito y luego a Juanita en el primer equipo. En estos casos, solo interesa que ambos se integren en dicho grupo y que no podrán estar en otro.

$$C_{(20,4)} = \frac{20!}{(20-4)!4!} = \frac{2,432,902,008,176,640,000}{20,922,789,888,000 \cdot 24} = \frac{2,432,902,008,176,640,000}{502,146,957,312,000} = 4,845 \text{ maneras}$$

En este caso:

$n = 20$ alumnos.

$p = 4$ miembros del equipo.

Axiomas de probabilidad

De acuerdo con TechEdu (s.f.), la probabilidad se refiere a la posibilidad relativa de que ocurra un evento; por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de obtener águila al momento de lanzar una moneda al aire? Como habrás deducido, en esta situación se presentan dos posibilidades: que caiga águila o sol. No obstante, solo una de ellas te hace ganador, es decir, uno de los dos resultados o el 50%. Por este motivo, la probabilidad se define mediante la regla o fórmula de Laplace:

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

Si analizas con detenimiento el ejercicio de la moneda, entonces:

$S = \{\text{águila, sol}\}$. Este evento corresponde al espacio muestra o casos posibles del experimento.
 $A = \{\text{águila}\}$.

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

Observa el siguiente ejemplo y presta atención a las explicaciones.

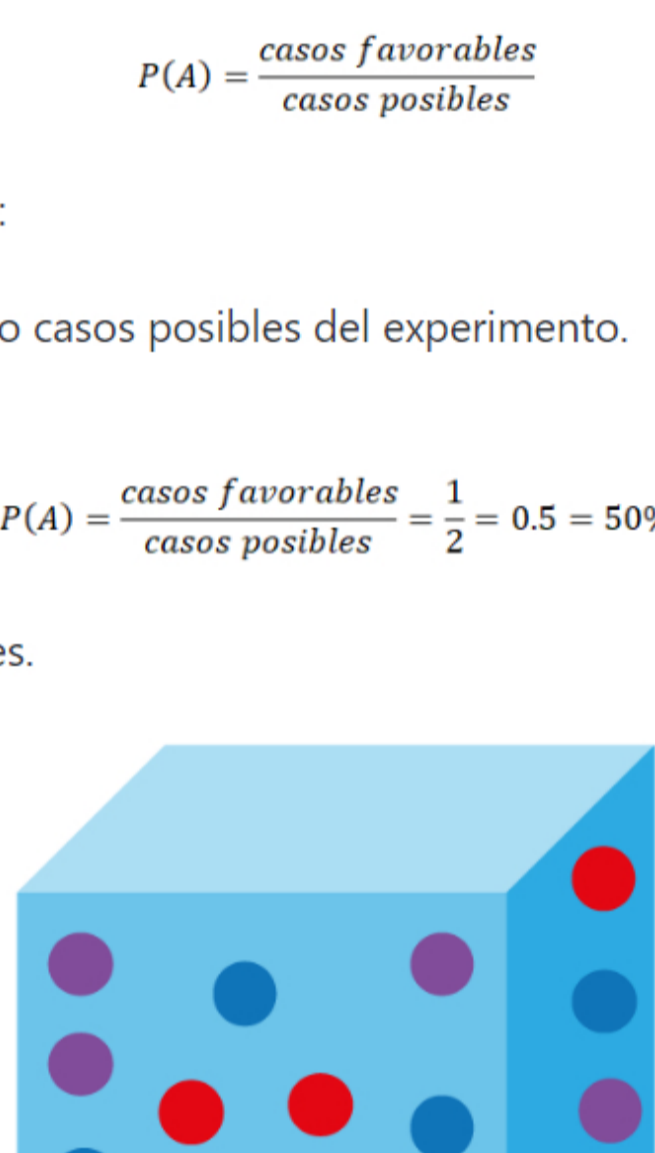


Imagen 1. Urna de pelotas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una pelota azul de la urna?

Para resolver esta pregunta, primero se establecen bien los datos, así que formula tu espacio muestra.

$S = \{5M, 5A, 4R\}$, es decir, tienes 14 pelotas diferentes: cinco moradas, cinco azules y cuatro rojas.
 $A = \{5A\}$ cinco de las pelotas son favorables.

Por tanto, la probabilidad se calcula de esta manera:

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{5}{14} = 0.36 = 36\% \text{ de probabilidad de obtener una pelota azul.}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una pelota morada o roja?

$S = \{5M, 5A, 4R\}$, es decir, tienes 14 pelotas diferentes: cinco moradas, cinco azules y cuatro rojas.
 $B = \{5M\} + \{4R\} = \{5M, 4R\} = 9$ pelotas son favorables.

Por tanto, la probabilidad se determina de esta forma:

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{9}{14} = 0.64$$

= 64% de probabilidad de obtener una pelota morada o roja.

Otra manera de resolverlo es como si se tratara de la suma de ambas probabilidades, es decir:

$P(B1) = \text{Sacar una pelota morada} = \{5M\}$.
 $P(B2) = \text{Sacar una pelota roja} = \{4R\}$.

Por tanto, la probabilidad se calcula así:

$$P(B1) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{5}{14} = 0.36 \text{ (pelota morada).}$$
$$P(B2) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{4}{14} = 0.28 \text{ (pelota roja).}$$

$$P(B) = P(B1) + P(B2) = 0.36 + 0.28 = 0.64 \text{ o } 64\%.$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una pelota que no sea azul o roja?

En este caso, observa que el espacio muestra son todos los resultados posibles:

$S = \{5M, 5A, 4R\}$, lo cual equivale al 100% de los resultados, es decir, a todo lo que puede suceder.

Entonces, definimos:

$A = \text{Obtener una pelota azul}$.
 $B = \text{Obtener una pelota morada}$.
 $C = \text{Obtener una pelota roja}$.

$$P(A) = \frac{5}{14} = 0.36$$

$$P(B) = \frac{5}{14} = 0.36$$

$$P(C) = \frac{4}{14} = 0.28$$

La suma de todas las probabilidades equivale a 1 o al 100%.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0.36 + 0.36 + 0.28 = 1 = 100\%$$

Para saber la probabilidad de extraer una pelota que **no** sea azul o roja, puedes hacer una resta:

$$P(D) = 1 - (P(A) + P(C)) = 1 - (0.36 + 0.28) = 1 - 0.64 = 0.36\%$$

Diagramas de árbol

Un diagrama de árbol es una herramienta gráfica para visualizar las distintas posibilidades y eventos que pueden ocurrir en una situación de probabilidad. Los eventos se representan como ramas de un árbol y las probabilidades asociadas con ellos se plasman en las secciones correspondientes; el diagrama se lee de izquierda a derecha y de arriba a abajo.

Imagina que quieres calcular la probabilidad de obtener sol dos veces seguidas al lanzar una moneda, así que necesitas plasmar los posibles escenarios. A continuación, se presenta un ejemplo sobre cómo usar un diagrama de árbol para representar esta situación.

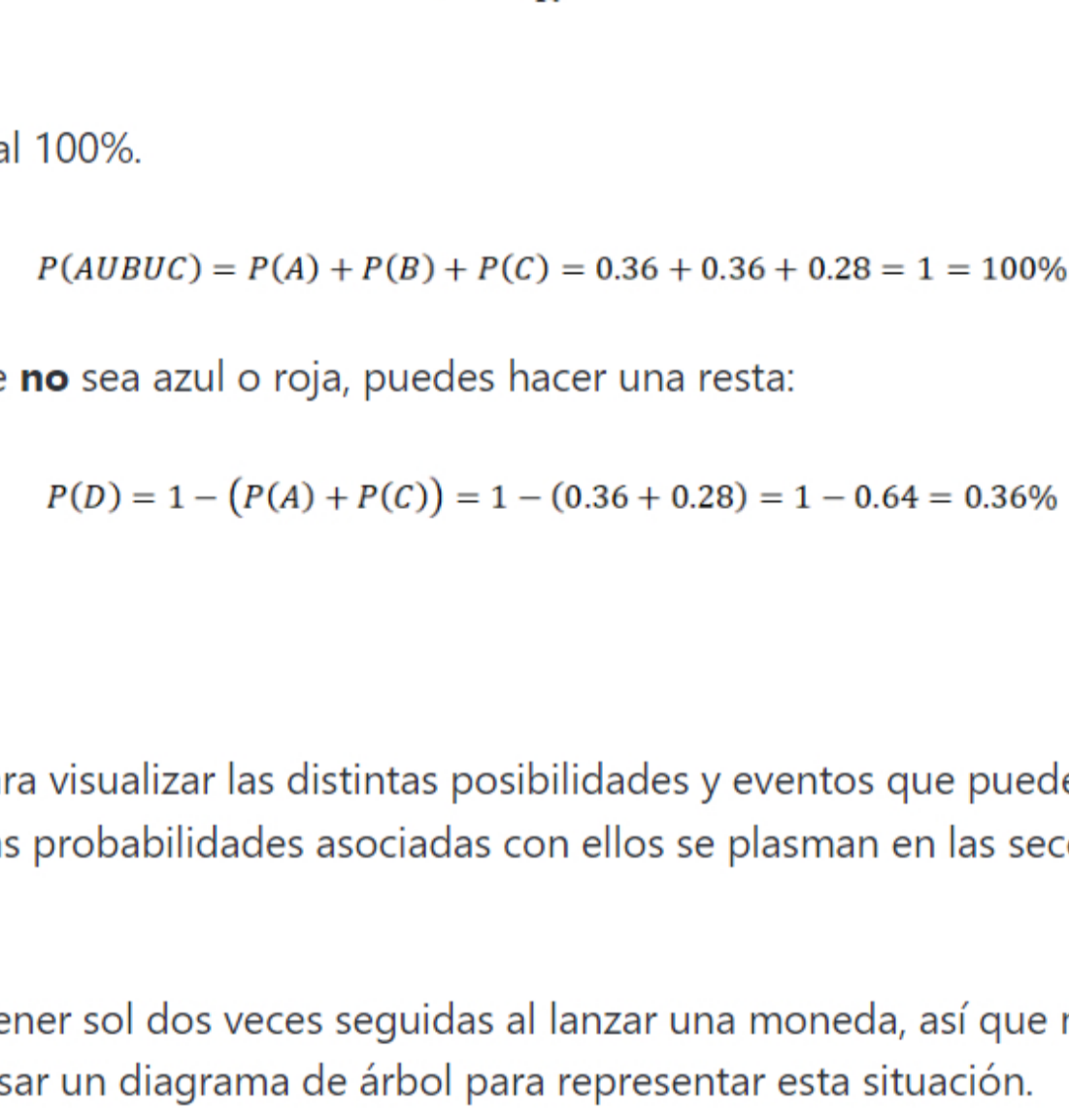


Figura 1. Diagrama de árbol.

En el diagrama, cada nivel representa un lanzamiento de la moneda, mientras que las ramas que se derivan de ellos suponen los posibles resultados. Las probabilidades asociadas con cada rama son iguales, pues se parte del principio de que la moneda es justa.

En el primer lanzamiento (nivel 1), la moneda puede caer en águila o sol. Si salió águila, en el segundo lanzamiento (nivel 2) también pueden obtenerse ambos resultados; entonces, se conforman las parejas "águila-águila" y "águila-sol". Por el contrario, si el primer lanzamiento (nivel 1) resulta sol, en el segundo lanzamiento (nivel 2) resulta sol, así que se tendrían estas combinaciones: "sol-águila" y "sol-sol".

Por estas razones, el espacio muestra se define en estos términos:

$S = \{\text{"Águila-Águila"}, \text{"Águila-Sol"}, \text{"Sol-Águila"}, \text{"Sol-Sol"}\}$

De estos cuatro resultados, solo uno cumple con la condición de obtener sol en dos lanzamientos consecutivos; por tanto, la probabilidad de que esto ocurra es de 1/4 o del 25%.

Tecmilenio no guarda relación alguna con las marcas mencionadas como ejemplo. Las marcas son propiedad de sus titulares conforme a la legislación aplicable, se utilizan con fines académicos y didácticos, por lo que no existen fines de lucro, relación publicitaria o de patrocinio.

Cierre

A lo largo de este tema, entendiste los conceptos asociados con lo factorial, así como los tipos de agrupación a los que puedes recurrir cuando necesitas o no un orden en tu información. En este sentido, las permutaciones o variaciones se emplean cuando se requiere una organización de los datos, mientras que las combinaciones se usan en los otros casos. Además, comprendiste la regla de Laplace para el cálculo de probabilidad, la cual consiste en la división de los casos favorables sobre los casos posibles; de esta operación, se obtiene un valor entre 0 y 1 o entre el 0% y el 100% de posibilidad de que ocurra algún evento. Estas son las bases fundamentales para el estudio de la probabilidad.

Checkpoint

Asegúrate de:

- Comprender el orden en las agrupaciones (cuándo permutan o combinan) para resolver problemas de conteo y probabilidades de manera efectiva.
- Aplicar los conceptos de probabilidad a la solución de ejercicios o combinar para resolver casos de la vida diaria.

Bibliografía

- Reyes, M. (2022). *Permutaciones*. Recuperado de <https://rpubs.com/JemiR/874197>
- TechEdu. (s.f.) *Probabilidad Definición / explicación*. Recuperado de <https://techlib.net/techedu/probabilidad/>

La obra presentada es propiedad de ENSEÑANZA E INVESTIGACIÓN SUPERIOR A.C. (UNIVERSIDAD TECMILENIO), protegida por la Ley Federal de Derecho de Autor; la alteración o deformación de una obra, así como su reproducción, exhibición o ejecución pública sin el consentimiento de su autor y titular de los derechos correspondientes es constitutivo de un delito tipificado en la Ley Federal de Derechos de Autor, así como en las Leyes Internacionales de Derecho de Autor.

El uso de imágenes, fragmentos de videos e informativos de eventos culturales, así como el uso de imágenes, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por UNIVERSIDAD TECMILENIO.

Queda prohibido copiar, reproducir, distribuir, publicar, transmitir, difundir, o en cualquier modo explotar cualquier parte de esta obra sin la autorización previa por escrito de UNIVERSIDAD TECMILENIO. Sin embargo, podrá utilizarse material a su computadora personal para uso educativo o personal o educacional de no comercial de LIMITED a una copia por página. No se podrá revalorar o bajar la copia ninguna leyenda de Derechos de Autor o la que manifieste la autoría del material.