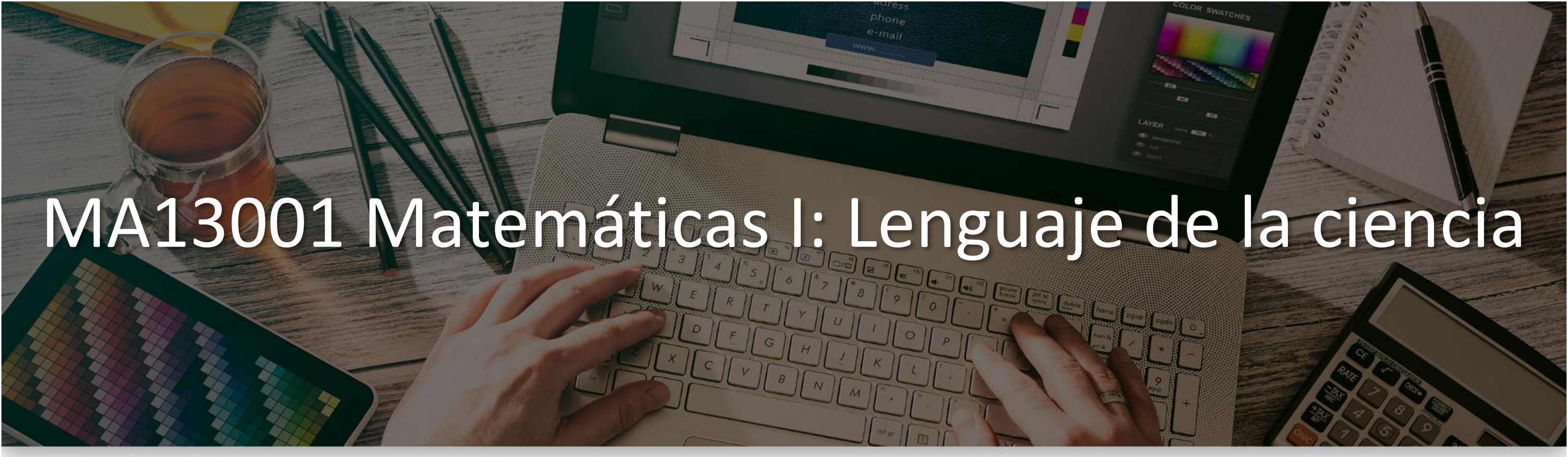


MA13001 Matemáticas I: Lenguaje de la ciencia

Estimado colega:

El propósito de esta guía es proporcionarte lineamientos prácticos que te ayuden a realizar tu labor docente de manera más organizada y precisa para enriquecer tu clase y cubrir de manera plena el temario para esta materia.

Se exponen guías y consejos de cada tema para que la enseñanza se facilite y te sea sencillo transmitir el conocimiento abstracto que cada tema supone, siempre aclarando los tecnicismos de los procedimientos y sobre todo aplicaciones que ayuden al estudiante a visualizar la aplicación de estos.

Las pantallas que muestran ejemplos se obtuvieron directamente del software que se está explicando en la computadora para fines educativos.

Competencia del curso

Soluciona problemas de la vida cotidiana aplicando los principios básicos del álgebra y la aritmética.

Módulo 1. Números reales y expresiones algebraicas

Los números reales denotados por la letra R se componen a su vez de conjuntos de números naturales, enteros, racionales e irracionales. A su vez, las expresiones algebraicas son la introducción al lenguaje matemático algebraico básico para describir situaciones de la vida cotidiana y la solución de incógnitas.

Tema 1. El conjunto de números reales

1.1 Recta numérica y valor absoluto
1.2 Intervalos y desigualdades

El estudiante localizará en una recta numérica diferentes tipos de números como números enteros, números irracionales, fracciones y decimales. De igual manera, resolverá desigualdades numéricas. A continuación, se muestran ejemplos del apartado de explicación de la plataforma ALEKS.

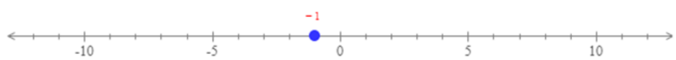
Marcar enteros en una recta numérica

PREGUNTA

Trazar -1, 4, y -6 en la recta numérica.

EXPLICACIÓN

- -1 es un entero *negativo*.
  Está 1 unidad a la *izquierda* del 0.



- 4 es un entero *positivo*.
  Está 4 unidades a la *derecha* del 0.

- -6 es un entero *negativo*.
  Está 6 unidades a la *izquierda* del 0.

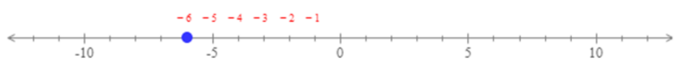


Figura 1.1 Marcar enteros en una recta numérica.

Valor absoluto de un número

PREGUNTA

Evaluar lo siguiente.

$|9| = \square$

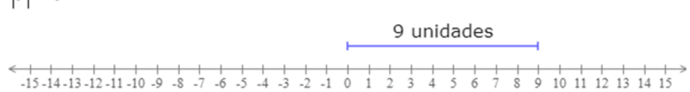
$|-4| = \square$

EXPLICACIÓN

Las marcas $|\,|$ a los lados de un número indican el valor absoluto del número.

El valor absoluto de un número es su distancia desde 0 en la recta numérica.

- $|9| = 9$



- $|-4| = 4$

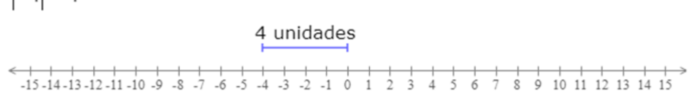


Figura 1.2 Valor absoluto de un número.

Tema 2. Operaciones fundamentales con los números reales

2.1 Suma, resta, multiplicación y división
2.2 Leyes de exponentes
2.3 Potencias y raíces

Las operaciones fundamentales de los números reales incluyen: suma, resta, multiplicación, división, exponente, potencias y raíces. Es importante resaltar que cada par de operaciones es lo **opuesto** de la otra. Ejemplo: $x^3 = \sqrt[3]{x}$

A continuación, se te muestra un resumen de las leyes que involucran exponentes, potencias y raíces.

Ley	Ejemplo
$x^1 = x$	$5^1 = 5$
$x^0 = 1$	$3^0 = 1$
$x^{-1} = 1/x$	$2^{-1} = ½$
$x^m x^n = x^{m+n}$	$x^2x^2 = x^{2+2} = x^4$
$x^m/x^n = x^{m-n}$	$x^4/x^3 = x^{4-3} = x$
$(x^m)^n = x^{mn}$	$(x^2)^6 = x^{2\times6} = x^{12}$
$(xy)^n = x^n y^n$	$(xy)^2 = x^2y^2$
$(x/y)^n = x^n/y^n$	$(x/y)^3 = x^3 / y^3$
$x^{-n} = 1/x^n$	$x^{-5} = 1/x^5$
$\mathbf{x}^{\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}} = \sqrt[n]{x^m}$	$\mathbf{x}^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{x^2}$

Tabla 2.1 Leyes de exponentes

Tema 3. Propiedades de los números reales

3.1 Propiedades conmutativa, asociativa y distributiva
3.2 Propiedad de identidad e inverso

Las propiedades de las operaciones básicas de los números reales se asocian como:

- Propiedad conmutativa
- Propiedad asociativa
- Propiedad distributiva

La siguiente ayuda visual que se puede consultar en ALEKS nos resume las propiedades con su respectivo ejemplo.

	Propiedades de la suma	Propiedades de la multiplicación
Conmutatividad	$x+y=y+x$	$x\cdot y=y\cdot x$
Asociatividad	$(x+y)+z=x+(y+z)$; $x+(y+z)=(x+y)+z$	$(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$; $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$
Identidad	$x+0=x$; $0+x=x$	$x\cdot 1=x$; $1\cdot x=x$
Inversa	$x+(-x)=0$; $-x+x=0$	Para $x\neq 0$, $x\cdot\frac{1}{x}=1$ y $\frac{1}{x}\cdot x=1$
Propiedad distributiva		
$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$ y $(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$		
Propiedad multiplicativa de cero		
$x\cdot 0=0$ y $0\cdot x=0$		

Figura 3.1 Propiedades de los números reales

3.3 Paréntesis y orden en las operaciones

Los paréntesis son un aspecto esencial para la metodología y el mejor método de resolución de incógnitas.

Los diferentes paréntesis tienen su jerarquía de operación. Recordando estos conceptos, se tiene que:

<u>Reglas para orden de operaciones</u>

1. Resolver paréntesis u otros símbolos. ( ) [ ] { }
2. Resolver exponentes o raíces.
3. Multiplicar y dividir de izquierda a derecha.
4. Sumar y restar de izquierda a derecha.

Tema 4. Lenguaje algebraico

El lenguaje algebraico es otra manera de expresión para cualquier situación de estudio que involucre incógnitas.

4.1 De enunciados a expresiones matemáticas

Las expresiones básicas de mayor uso para la construcción de enunciados algebraicos son las siguientes:

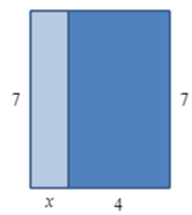
- la suma, la diferencia, el producto, el cociente, el doble y el cubo de un número.

En ALEKS, se mostrarán ejemplos como los siguientes:

Escribir expresiones algebraicas para el área de una figura

PREGUNTA

La figura siguiente es un rectángulo compuesto de dos rectángulos más pequeños.



(a) Hallar el área de los siguientes (en unidades cuadradas).

El rectángulo claro (a la izquierda): ☐
El rectángulo oscuro (a la derecha): ☐

(b) Dar el área de la figura completa (en unidades cuadradas) de dos formas distintas.

Como una suma de dos áreas: ☐
Como un producto de la longitud y la anchura: ☐

Figura 4.1 Problemas lenguaje algebraico.

4.2 Notación de expresiones algebraicas y términos semejantes

Los términos semejantes son aquellos términos que son compatibles algebraicamente. La plataforma arrojará los siguientes problemas:

Combinar términos semejantes: Coeficientes naturales

PREGUNTA

Simplificar.

$$6b-b$$

EXPLICACIÓN

Primero, observemos que b es igual a $1b$.
Por consiguiente, podemos reescribir el problema como $6b-1b$.

Luego, observemos que $6b$ y $1b$ tienen la misma variable, b.
Son términos semejantes. Más

Esto significa que podemos simplificar $6b-1b$ restando 6 y 1.

Obtenemos lo siguiente.

$$6b-1b=5b$$ Más

Figura 4.2 Combinar términos semejantes: coeficientes naturales.

Combinar términos semejantes: Coeficientes enteros

PREGUNTA

Simplificar.

$-5c^2+11c^2$

EXPLICACIÓN

Nótese que $-5c^2$ y $11c^2$ tienen la misma parte variable, c^2.

Son términos semejantes. Más

Por lo tanto, podemos simplificar $-5c^2+11c^2$ sumando -5 y 11.

$-5c^2+11c^2=6c^2$ Más

RESPUESTA

$6c^2$

Figura 4.3 Combinar términos semejantes: coeficientes enteros.

4.3 Clasificación y grado expresiones algebraicas

El grado de los polinomios se clasifica de acuerdo al máximo exponente que maneje, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Polinomio	Grado de polinomio
$3x^3+2x^2+x+5$	Tercer grado
$4x^4+3x^2+8$	Cuarto grado
y^5+2x^2+16	Quinto grado

Tabla 4.1 Ejemplo de grado de polinomios

En ALEKS se muestran los siguientes métodos:

Grado y coeficiente principal de un polinomio de una variable

PREGUNTA

¿Cuáles son el coeficiente principal y el grado del polinomio?

$$-7x^7+x^8-23x-3$$

EXPLICACIÓN

Primero reescribimos este polinomio en forma general.
Cambiamos los términos de modo que los exponentes en la variable disminuyen de izquierda a derecha.

$$-7x^7+x^8-23x-3 = \underbrace{x^8-7x^7-23x-3}_{\text{forma general}}$$

Más

El término principal es el primer término cuando el polinomio está en forma general.
Por lo tanto, para este polinomio, el término principal es x^8.

- **Coeficiente principal**

  El coeficiente de un término es el número que se multiplica con la variable.
  (Cuando no existe una variable, el coeficiente es el término mismo.)

  El coeficiente principal es el coeficiente del término principal.

  Para nuestro polinomio, el término principal es x^8, que es igual a $1x^8$. Por lo tanto, el coeficiente principal es 1.

- **Grado**

  El grado de un término es el exponente de su variable.
  (Cuando no existe una variable, el grado es 0.)

  El grado de un polinomio es el grado de su término principal.

  Para nuestro polinomio, el término principal es x^8. Por lo tanto, el grado del polinomio es 8.

Figura 4.4 Grado y coeficiente principal

Grado de un polinomio multivariable

PREGUNTA

Dar el grado del polinomio.

$$6w^{10}+4+vu^3-6u^4w^2v^3$$

EXPLICACIÓN

Para hallar el grado del polinomio, primero hallamos el grado de cada término.

Para hallar el grado de un término con más de una variable, sumamos los exponentes de sus variables.

- El grado de $6w^{10}$ es 10.
- El grado de 4 es 0 (porque el grado de cada término constante es 0).
- El grado de vu^3 es $1+3=4$.
- El grado de $-6u^4w^2v^3$ es $4+2+3=9$.

El grado del polinomio es el mayor de estos grados, que es 10.

RESPUESTA

La respuesta es 10.

Figura 4.5 Grado de un polinomio multivariable

Tema 5. Aplicaciones del álgebra

5.1 Suma y resta
5.2 Multiplicación y división
5.3 Expresiones entre cantidades relacionadas

Es importante recordar a los estudiantes las reglas para los signos.

Multiplicación	División	Suma y resta
(+)(+)=+	+/+=+	+ y += Se suman los valores
(+)(-)=-	+/-=-	+ y - = Se restan y se pone el signo del término mayor
(-)(-)=+	-/+=-	- y - = Se suman las cantidades y se pone el signo negativo
(-)(+)=-	-/-=+	

Tabla 4.2 Leyes de los signos

Los problemas aplicados a este respecto son mostrados a continuación:

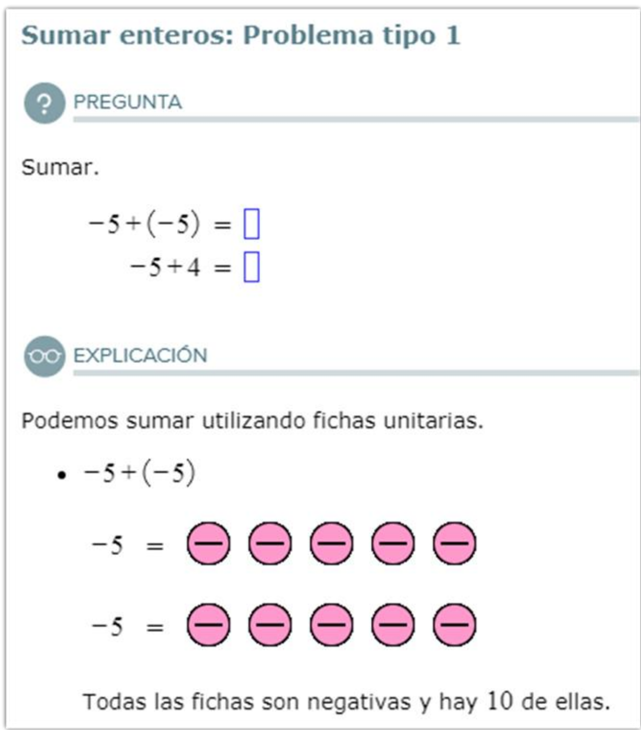


Figura 1.5 Suma de enteros (plataforma ALEKS)

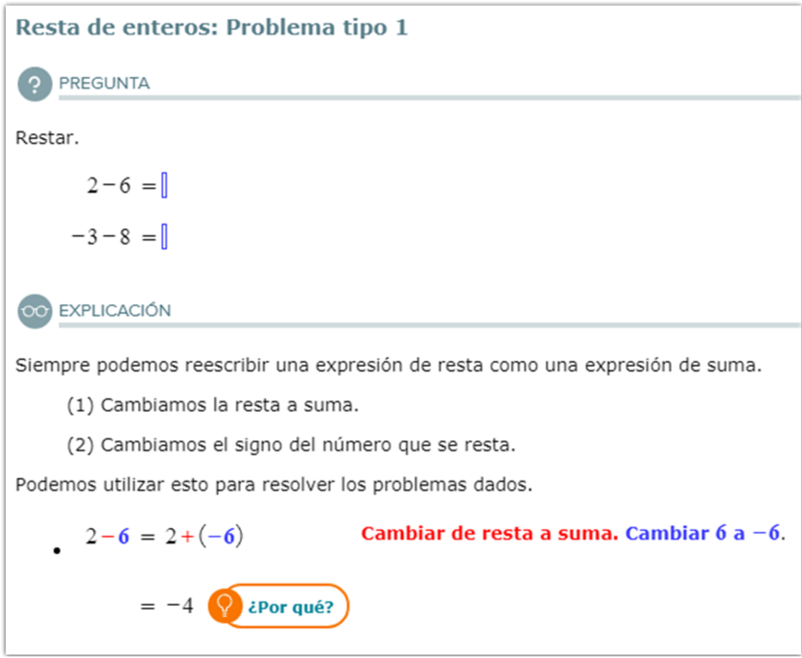


Figura 1.6 Resta de enteros (plataforma ALEKS)

Módulo 2. Factorización y radicales

La factorización siempre es un tema complicado para asimilar. Por este motivo, se recomienda la práctica de ejemplos para la mejor comprensión de este tema. Esperamos que te resulte útil en tu docencia.

Tema 6. Productos notables

6.1 Binomio al cuadrado y binomio conjugado
6.2 Binomios con término común y término semejante
6.3 Suma y diferencia de cubos

Para tu ayuda, se te muestra un resumen de los productos notables y de la factorización de expresiones algebraicas.

Nombre	Producto notable
Diferencia de cuadrados	$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$
Suma de binomios al cuadrado	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
Resta de binomios al cuadrado	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
Suma de binomios al cubo	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
Resta de binomios al cubo	$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Tabla 6.1 Productos notables

Tema 7. Factorización

La técnica de factorización consiste en la descomposición de una expresión algebraica en factores. Examinaremos caso por caso.

7.1 Factor común y diferencia de cuadrados

<u>Factor común:</u> es el caso más simple de factorización, pues se busca localizar el término que se repite en cada expresión algebraica.

En este caso, el término común repetitivo es la variable x, por lo que se coloca fuera de un paréntesis y se multiplica por los términos faltantes.

Ejemplo: $2x^2 + x = x\,(2x + 1)$

En ALEKS, se muestra el siguiente ejemplo:

Sacar el factor monomio de un polinomio: De una variable

PREGUNTA

Factorizar $8b^3 + 13b^2$.

EXPLICACIÓN

Primero hallamos el mcd de $8b^3$ y $13b^2$.

El mcd es b^2. Más

Luego sacamos el factor mcd utilizando la propiedad distributiva.

$$8b^3 + 13b^2 = b^2(8b) + b^2(13)$$
$$= b^2(8b + 13)$$

Aquí está la respuesta.

RESPUESTA

$b^2(8b + 13)$

Figura 7.1 Factor común

<u>Diferencia de cuadrados</u>: las condiciones para factorizar una diferencia de cuadrados que se deben de tener son las siguientes:

Ejemplos: $(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y)$
$(x^2 - 16) = (x + 4)(x - 4)$

En ALEKS, se muestra el siguiente ejemplo:

Multiplicar binomios conjugados: Multivariable

PREGUNTA

Multiplicar.

$$(7y-9x)(7y+9x)$$

Simplificar la respuesta.

EXPLICACIÓN

Estamos multiplicando una diferencia $(7y-9x)$ y una suma $(7y+9x)$ de los dos mismos términos, $7y$ y $9x$.

Podemos utilizar el siguiente dato.

$$(A-B)(A+B)=A^2-B^2$$

¿Por qué es esto verdadero?

Esto es lo que obtenemos.

$$(7y-9x)(7y+9x)=(7y)^2-(9x)^2 \quad \text{Utilizamos el dato anterior con } A=7y \text{ y } B=9x$$
$$=49y^2-81x^2$$

RESPUESTA

$$49y^2-81x^2$$

Otra manera

Figura 7.2 Multiplicación de binomios conjugados

Factorizar una diferencia de cuadrados en una variable: Avanzado

PREGUNTA

Factorizar.

$$49u^2-25$$

EXPLICACIÓN

Aquí mostramos la fórmula para factorizar una diferencia de cuadrados.

$$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$$

Verificar esto

Podemos utilizar la misma en este problema.

$$49u^2-25=(7u)^2-5^2 \quad \text{Lo escribimos como } A^2-B^2 \text{, donde } A=7u \text{ y } B=5$$
$$=(7u+5)(7u-5) \quad \text{Utilizamos la fórmula de la diferencia de cuadrados}$$

RESPUESTA

$$(7u+5)(7u-5)$$

Figura 7.3 Multiplicación de binomios conjugados

7.2 Trinomio de la forma x^2+bx+c y trinomio de la forma ax^2+bx+c

Trinomio de la forma x^2+bx+c:

Las reglas para este caso se describen a continuación:

1) El trinomio se descompone en dos factores binomios cuyo primer término es la raíz cuadrada del primer término del trinomio.

2) Se buscan dos números que sumados algebraicamente den como resultado el coeficiente del segundo término b y multiplicados den el tercer término c.

Ejemplo: $(x^2 + 5x + 6) = (x + 3)(x + 2)$

Trinomio de la forma ax^2+bx+c:

Este caso en particular es un poco complicado para asimilar, por lo que se recomienda practicar con los alumnos y motivarlos a realizar sus actividades previas y de entrenamiento.

7.3 Suma y diferencia de cubos

Es el mismo desarrollo de los productos notables, pero se aplica a este tipo de factorización de manera inversa.

Tema 8. Fracciones algebraicas

Una fracción algebraica es un cociente cuyo numerador y denominador son expresiones algebraicas, ya sean monomios, binomios o polinomios. El objetivo en este tipo de problemas es simplificar a su máxima expresión aplicando técnicas de factorización que indeterminen; es decir, técnicas que hagan cero al denominador de la fracción. En este tema, ALEKS no empata con el contenido de fracciones algebraicas en sí, sino que muestra toda la metodología para fracciones sencillas con números naturales, no con variables, por lo que se recomienda complementar este tema con alguna fuente externa o el libro de texto que se proporciona en la misma plataforma.

8.1 Simplificación de expresiones racionales
8.2 Multiplicación y división

Se muestran a continuación ejemplos básicos de este tipo de ejercicios.

Reducir una fracción

PREGUNTA

Escribir la fracción $\frac{14}{21}$ en forma reducida.

EXPLICACIÓN

Necesitamos hallar el *número más grande* que divida a 14 y 21 sin residuo. Este número es 7, y hacemos lo siguiente.

$$\frac{14}{21} = \frac{14 \div 7}{21 \div 7} = \frac{2}{3}$$

RESPUESTA

La respuesta es $\frac{2}{3}$.

Las fracciones $\frac{14}{21}$ y $\frac{2}{3}$ son equivalentes. Tienen el mismo valor.

Figura 8.1 Reducir una fracción

División de fracciones

PREGUNTA

Dividir. Escribir la respuesta en forma reducida.

$$\frac{7}{12} \div \frac{2}{9}$$

EXPLICACIÓN

Dividir entre $\frac{2}{9}$ es lo mismo que multiplicar por su recíproco $\frac{9}{2}$. Más

$$\frac{7}{12} \div \frac{2}{9} = \frac{7}{12} \times \frac{9}{2}$$

$$= \frac{7}{\cancel{12}_{4}} \times \frac{\cancel{9}^{3}}{2}$$ Cancelamos el factor común 3

$$= \frac{7 \times 3}{4 \times 2}$$ Multiplicamos los numeradores;
Multiplicamos los denominadores

$$= \frac{21}{8}$$

Figura 8.2 División de fracciones

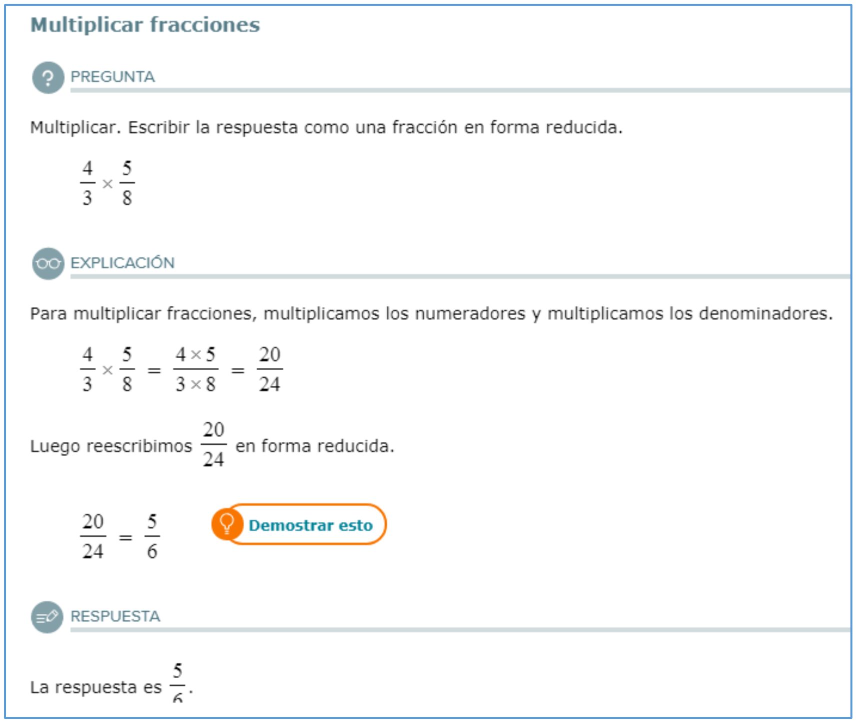


Figura 8.3 Multiplicar fracciones

Tema 9. Fracciones complejas

Igualmente, para este tema en especial, se recomienda hacer los ejercicios básicos que muestra ALEKS y agregar material complementario. Puedes tomar como referencia el cuaderno de trabajo que está en Blackboard en las páginas 18 y 19. Sin embargo, se te da una guía resumida de cada subtema.

9.1 Suma y resta de fracciones
9.2 Simplificación de fracciones complejas

Pasos para simplificar las fracciones algebraicas:

$$\frac{5}{y} + \frac{8y}{7}$$

$(y)(7) = 7y$	1. Obtener el común denominador multiplicando los valores de los denominadores.
$(5)(7) = 35 \quad (y)(8y) = 8y^2$	2. Multiplicar con el producto cruzado los denominadores con numeradores.
$\frac{35}{7y} + \frac{8y^2}{7y}$	3. Reescribir la expresión.

Tabla 9.1 Simplificación de fracciones algebraicas

9.3 Aplicación de ecuaciones racionales

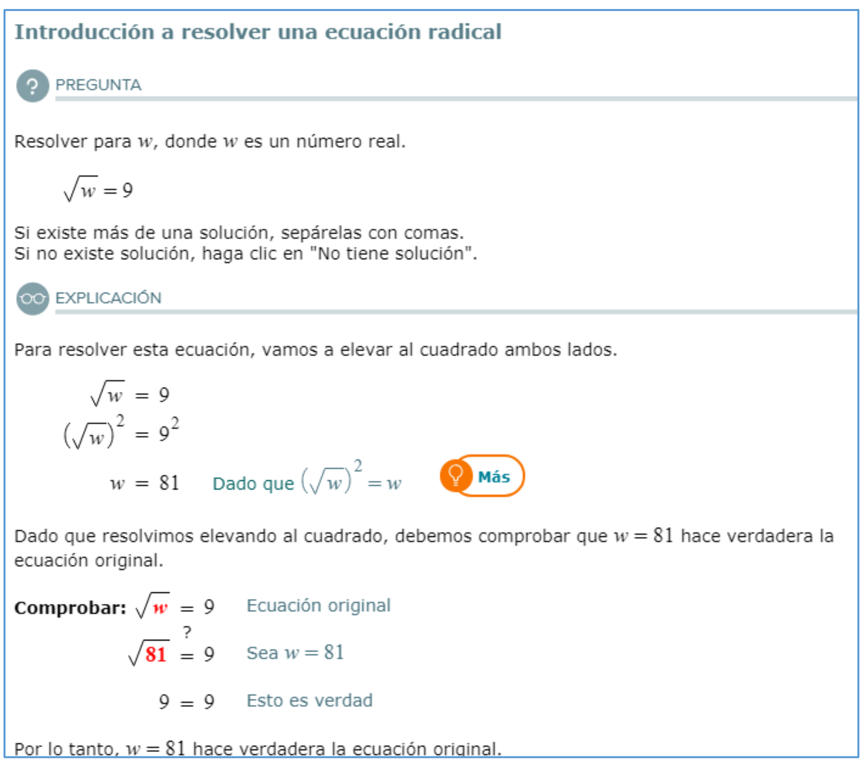
Para motivar a los alumnos, se te proponen los siguientes problemas aplicados a este tema. Si tú lo deseas, puede ser una actividad de puntos extras.

- María y José están planeando ordenar un almacén de productos juntos. José piensa que, si trabajara solo, le tomaría 3 veces más que si trabajara con María pintar toda la casa. Trabajando juntos, completan el trabajo en 24 horas. ¿Cuánto le tomaría a cada uno de ellos, trabajando solos, terminar el trabajo?
- Andrea y Roque pueden cada uno lavar y aspirar un carro en 2 horas. Flor necesita 3 horas para hacer el mismo trabajo ella sola. Si Flor, Andrea y Roque trabajan juntos, ¿cuánto tiempo les tomará limpiar un carro?
- A Oscar le toma 2 horas plantar 50 flores. A Liz le toma 3 horas plantar 45 flores. Trabajando juntos, ¿cuánto les tomará plantar 150 flores?

Tema 10. Radicales

10.1 Simplificación de radicales
10.2 Racionalización

Los radicales involucran su operación contraria, los exponentes. Un ejemplo simple se encuentra a continuación:



Introducción a resolver una ecuación radical

PREGUNTA

Resolver para w, donde w es un número real.

$$\sqrt{w} = 9$$

Si existe más de una solución, sepárelas con comas.
Si no existe solución, haga clic en "No tiene solución".

EXPLICACIÓN

Para resolver esta ecuación, vamos a elevar al cuadrado ambos lados.

$$\sqrt{w} = 9$$
$$\left(\sqrt{w}\right)^2 = 9^2$$
$$w = 81 \quad \text{Dado que } \left(\sqrt{w}\right)^2 = w$$

Más

Dado que resolvimos elevando al cuadrado, debemos comprobar que $w = 81$ hace verdadera la ecuación original.

Comprobar: $\sqrt{w} = 9$ Ecuación original

$\sqrt{81} \stackrel{?}{=} 9$ Sea $w = 81$

$9 = 9$ Esto es verdad

Por lo tanto, $w = 81$ hace verdadera la ecuación original.

Figura 10.1 Introducción a una ecuación radical (plataforma ALEKS)

Manipulación de símbolos algebraicos con radicales

PREGUNTA

Resolver la siguiente ecuación para N.

$$\sqrt{\frac{N}{9}} = U$$

EXPLICACIÓN

Para resolver para N, primero elevamos ambos lados al cuadrado.
Con esto eliminamos los signos radicales.

$$\sqrt{\frac{N}{9}} = U$$

$$\left(\sqrt{\frac{N}{9}}\right)^2 = U^2$$

$$\frac{N}{9} = U^2 \qquad \text{Puesto que } \left(\sqrt{\frac{N}{9}}\right)^2 = \frac{N}{9}$$

Más

Luego, para terminar, resolvemos para N.

Figura 10.2 Símbolos algebraicos con radicales

Módulo 3. Ecuaciones lineales y aplicaciones

Las ecuaciones lineales son la base de los elementos matriciales. Las aplicaciones de los conceptos de soluciones por el método de Cramer son muy interesantes para el estudiante. Este módulo en especial es una lección de cómo el lenguaje matemático domina muchos aspectos tecnológicos de la vida diaria. Se agregarán aplicaciones interesantes para motivar al estudiante a ver las matemáticas como algo real y sumamente útil en nuestra era tecnológica.

Tema 11. Operaciones con radicales

11.1 Operaciones con radicales
11.2 Ecuaciones con radicales

Los temas 10 y 11 son homólogos, ya que tratan el mismo tema pero tomando en cuenta las operaciones aritméticas básicas.

Las reglas básicas que se consideran dependen de los factores que compartan el monomio y las raíces que se pueden afectar.

Introducción a resolver una ecuación radical

PREGUNTA

Resolver para y, donde y es un número real.

$$\sqrt{y} = 4$$

Si existe más de una solución, sepárelas con comas.
Si no existe solución, haga clic en "No tiene solución".

EXPLICACIÓN

Para resolver esta ecuación, vamos a elevar al cuadrado ambos lados.

$$\begin{aligned} \sqrt{y} &= 4 \\ \left(\sqrt{y}\right)^2 &= 4^2 \\ y &= 16 \qquad \text{Dado que } \left(\sqrt{y}\right)^2 = y \end{aligned}$$

Más

Figura 11.1 Introducción a resolver una ecuación radical

Resolver una ecuación radical que se simplifica a una ecuación lineal: Un radical, básico

PREGUNTA

Resolver para w, donde w es un número real.

$$-2 + \sqrt{w-15} = 4$$

Si hay más de una solución, separarlas con comas.
Si no tiene solución, haga clic en "No tiene solución".

EXPLICACIÓN

Primero aislamos el radical en un lado de la ecuación.

$$\begin{aligned} -2 + \sqrt{w-15} &= 4 \\ \sqrt{w-15} &= 6 \qquad \text{Sumamos 2 a ambos lados} \end{aligned}$$

Luego, elevamos al cuadrado ambos lados para eliminar el signo radical.

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{w-15}\right)^2 &= 6^2 \\ w-15 &= 36 \\ w &= 51 \qquad \text{Sumamos 15 a ambos lados} \end{aligned}$$

Debido a que resolvemos elevando al cuadrado, debemos comprobar que $w = 51$ hace que la ecuación original sea verdadera.

¿Por qué?

Figura 11.2 Ecuación radical a ecuación lineal

Tema 12. Solución de sistemas lineales

12.1 Ecuaciones lineales de una incógnita
12.2 Tipo de soluciones de sistemas lineales

En ALEKS, se ejemplifica de esta manera:

Resolver un sistema de ecuaciones lineales gráficamente

PREGUNTA

Trazar el gráfico del sistema siguiente y escribir su solución.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ -2x + y = -5 \end{cases}$$

Observe que también se puede contestar "No tiene solución" o "Número infinito" de soluciones.

EXPLICACIÓN

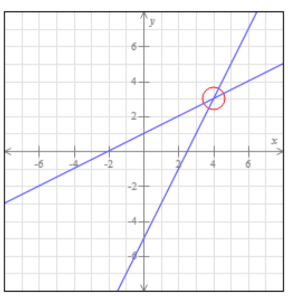
El gráfico de cada ecuación es una recta. Una solución de este sistema de ecuaciones es un punto donde las rectas se intersecan. Hay tres posibilidades.

Exactamente una solución: Esto ocurre cuando las rectas se intersecan en un solo punto.

Número infinito de soluciones: Esto ocurre cuando las dos rectas son la misma.

No tiene solución: Esto ocurre cuando las dos rectas son distintas y paralelas.

Trazamos las rectas $y = \frac{1}{2}x + 1$ y $-2x + y = -5$.



Trazar las rectas

Podemos ver que las rectas se intersecan en $(4, 3)$. Este punto es la solución del sistema.

Tema 13. Métodos de solución

13.1 Solución por sumas y restas
13.2 Solución por sustitución e igualación
13.3 Método de Cramer

Hay tres métodos: sustitución, eliminación y método de Cramer. Algunos problemas se muestran en las siguientes figuras:

Determinante de una matriz 2x2

PREGUNTA

Evaluar el siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

EXPLICACIÓN

El determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ se escribe $|A|$ o $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

El valor del determinante es como sigue.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Por consiguiente, $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = (5)\cdot(5) - (0)\cdot(6) = 25 - 0 = 25$.

Figura 13.1 Determinante de una matriz 2x2

Suma o resta de matrices

PREGUNTA

Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 7 & 2 & -6 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 6 \end{bmatrix}$.

Hallar $A+C$.

EXPLICACIÓN

Las dos matrices tienen el mismo tamaño. (Cada una tiene 2 filas y 3 columnas.)
Así que para hallar $A+C$, sumamos los elementos correspondientes.

$$\begin{aligned} A+C &= \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 7 & 2 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3+1 & 5+0 & 0+4 \\ 7+(-3) & 2+(-4) & -6+6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Figura 13.2 Suma o resta de matrices

Utilizar la regla de Cramer para resolver un sistema 2x2 de ecuaciones lineales

PREGUNTA

Utilizar la regla de Cramer para hallar la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$7x + 9y = 0$$
$$8x + 8y = 7.$$

Figura 13.3 Regla de Cramer para sistema 2x2

Utilizar la regla de Cramer para resolver un sistema de ecuaciones lineales 3x3

PREGUNTA

Utilizar la regla de Cramer para hallar el valor y que satisface el sistema de ecuaciones lineales:

$$x + 4y + z = 0$$
$$2x + y = -2$$
$$4x + 3y + z = 5.$$

Figura 13.4 Regla de Cramer para sistema 3x3

Tema 14. Aplicaciones sistemas lineales

14.1 Planteamiento de sistemas de ecuaciones
14.2 Solución de problemas aplicados

Se recomienda encargar un trabajo de investigación individual de aplicaciones sistemas lineales y resolver los siguientes problemas relacionados de este tema:

- Varios alumnos tienen duda sobre cuál será su promedio final en la clase de matemáticas. La maestra les dijo que existe una manera muy simple para calcular la calificación final de cada uno de ellos, por lo que les dijo que modelaran una ecuación que cumpliera con la condición de que el promedio de las calificaciones mensuales fuera equivalente al 70% de su calificación final. El examen final vale 30%. ¿Cuál es esta ecuación?

- Mi papá tiene 35 años. Él tiene el triple de edad que yo más 5 años. ¿Cuántos años tengo?

- El taxi que me lleva del Tecmilenio a mi casa me cobra $62. Si por el banderazo cobra $7 y por km. subsecuente cobra $5, ¿cuántos kilómetros hay del Tecmilenio a mi casa?

- Arturo compró 5 plumas y 4 cuadernos, por las que pagó $ 142.00. Benjamín compró 3 plumas y 5 cuadernos, por los que pagó $ 158.00. ¿Cuánto vale cada pluma y cuaderno?

Tema 15. Desigualdades

15.1 Propiedades de desigualdades
15.2 Solución de desigualdades

Una desigualdad es una expresión matemática que contiene un signo de desigualdad. La punta del signo siempre apunta al valor mínimo. Los signos de desigualdad son:

$\neq$ no es igual
$<$ menor que
$>$ mayor que
$\leq$ menor o igual que
$\geq$ mayor o igual que

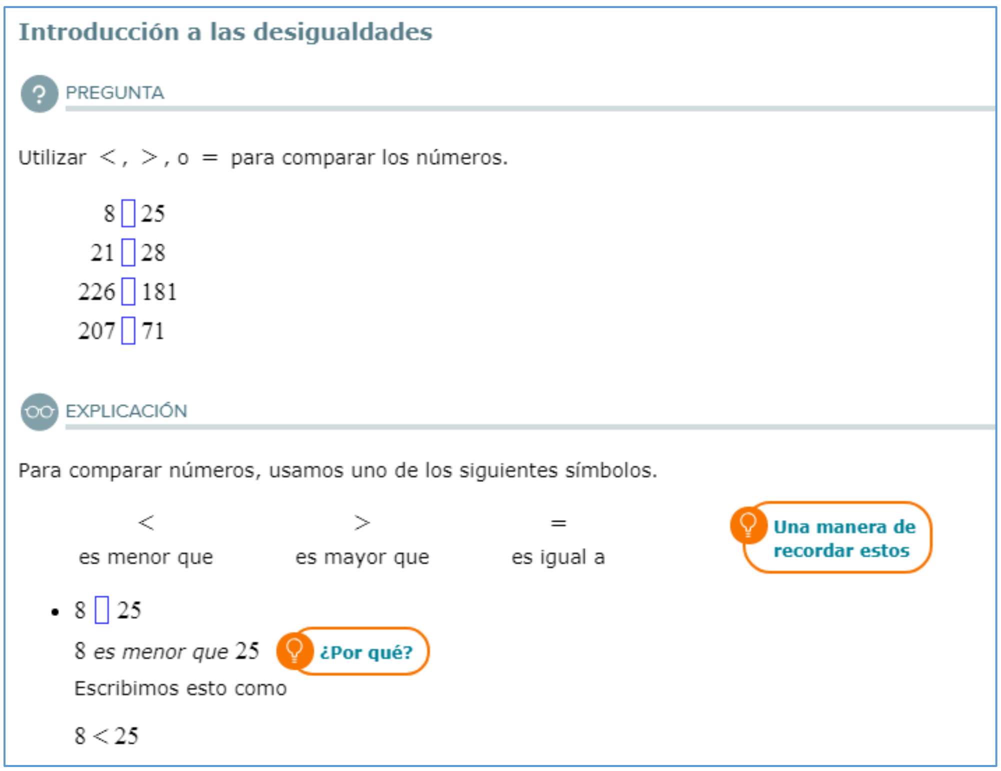


Figura 15.1 Desigualdades