Matemáticas II
Pensamiento matemático

Estimado colega:

El propósito de estas notas es darte una sugerencia de cómo guiar a los alumnos a lo largo del curso.

A continuación, se proporcionan las claves o conceptos importantes que debes considerar para cumplir con los objetivos establecidos y lograr que los alumnos adquieran las competencias necesarias.

Módulo 1. Función lineal y cuadrática

Los sistemas de coordenadas rectangulares formados por dos rectas perpendiculares trazadas sobre un plano permiten el análisis de relaciones que contengan dos variables.

Las rectas son llamadas ejes, la recta horizontal es el eje X, y la recta vertical es el eje Y. Además, los ejes dividen al plano en cuatro partes llamados cuadrantes.

Sobre estos sistemas de coordenadas se pueden identificar diferentes sistemas de ecuaciones lineales o cuadráticas.

Tema 1. Sistemas de coordenadas rectangulares

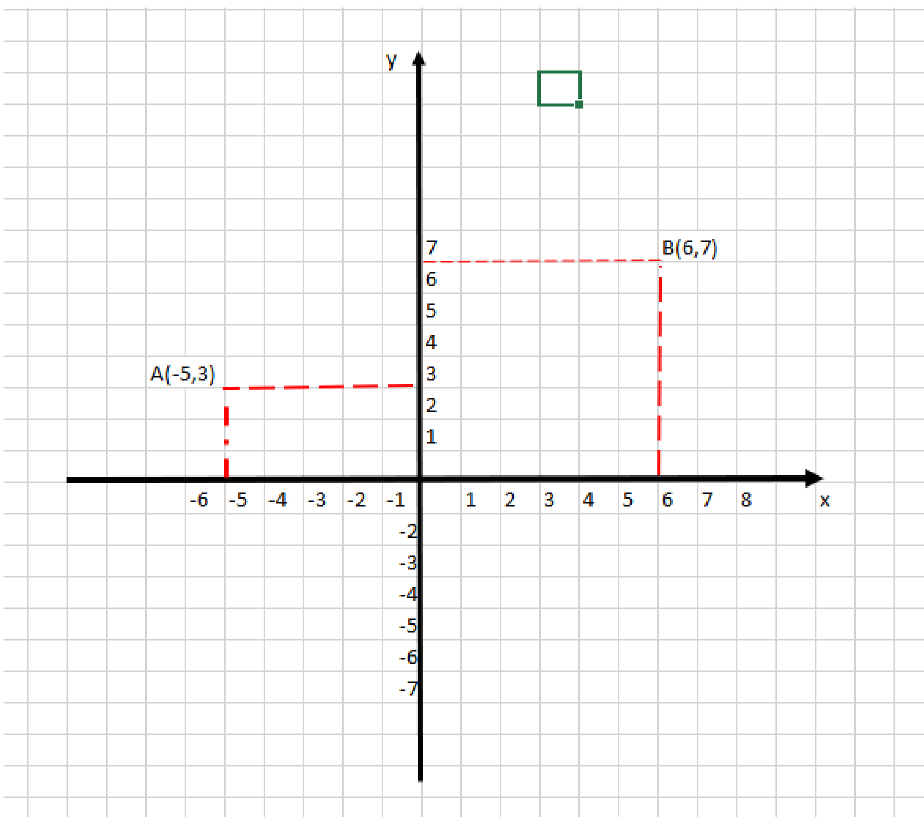
Contenido para el profesor ALEKS

1.1 Gráficas

- Interpretar un gráfico de líneas.
- Seleccionar el gráfico que corresponde a una narración: Básico.
- Hallar las intersecciones con el eje x y el eje y dado el gráfico de una recta en una cuadrícula.
- Trazar una recta en el cuadrante 1.
- Marcar un punto en el plano de coordenadas.
- Tablas de funciones con reglas de dos pasos.

- Tablas para ecuaciones lineales.
- Tabla para una función lineal.
- Trazar el gráfico de una función de la forma f(x) = ax2 + c.

- Iniciar la clase haciendo una reflexión sobre la importancia de las funciones dentro de la vida de las personas, haciendo hincapié en el término gráfica de funciones y establecer la relación entre dos variables.
- Ejemplo de cómo leer un punto en el plano de coordenadas.



Esta pantalla se obtuvo directamente del software que se está explicando en la computadora, para fines educativos.

- Proyectar el siguiente video:
  Practicopedia. (2011, 15 de noviembre). *Cómo encontrar un punto mediante coordenadas* [Archivo de video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=H1WeD5xJdKM
- Proyectar el siguiente video:
  TuProfesorVirtual. (2014, 9 de agosto). *Sistemas de Coordenadas Rectangulares - Plano Cartesiano - Lección 1* [Archivo de video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=2P46FprOypc

- Fomentar la lluvia de ideas por parte de los alumnos para identificar y establecer los conceptos básicos de los sistemas de coordenadas rectangulares.
- Buscar que los alumnos expliquen los conceptos más importantes del tema y mencionen ejemplos de acuerdo con su experiencia.

Tema 2. Relaciones

Contenido para el profesor ALEKS

2.1 Funciones

- Identificar funciones de relaciones.
- Gráficos de funciones de números naturales.
- Determinar si una ecuación define una función: Básico.
- Determinar si una ecuación define una función: Avanzado.
- Prueba de la recta vertical.

2.2 Dominio e imagen de una función

- Dominio y rango de pares ordenados.
- Notación conjuntista e intervalos.
- Escribir la regla de una función dada una tabla de pares ordenados: Reglas de dos pasos.
- Dominio y rango a partir del gráfico de una relación discreta.
- Dominio y rango a partir del gráfico de una función continua.
- Dominio y rango del gráfico de una parábola.

Continúa con los siguientes pasos para el desarrollo del tema:

- Iniciar la clase haciendo una reflexión sobre la importancia de establecer la diferencia entre funciones y relaciones.
- Establecer que el entendimiento de los conceptos de relación y de función es de suma importancia en matemáticas.
- Buscar que los alumnos puedan establecer la relación entre dos conjuntos *A* y *B*, y la forma de asociar o agrupar elementos de cada uno de ellos a través de diferentes ejemplos de su vida diaria.
- Proyectar el video:
  Salón de Matemáticas. (2013, 20 de abril). *Distinguir funciones y relaciones* [Archivo de video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=AHS7kd2wB1k
- Preguntar si los alumnos tienen dudas sobre el video tutorial.
- Establecer la diferencia entre dominio e imagen en una función y una relación.

Tema 3. Función lineal

Contenido para el profesor ALEKS

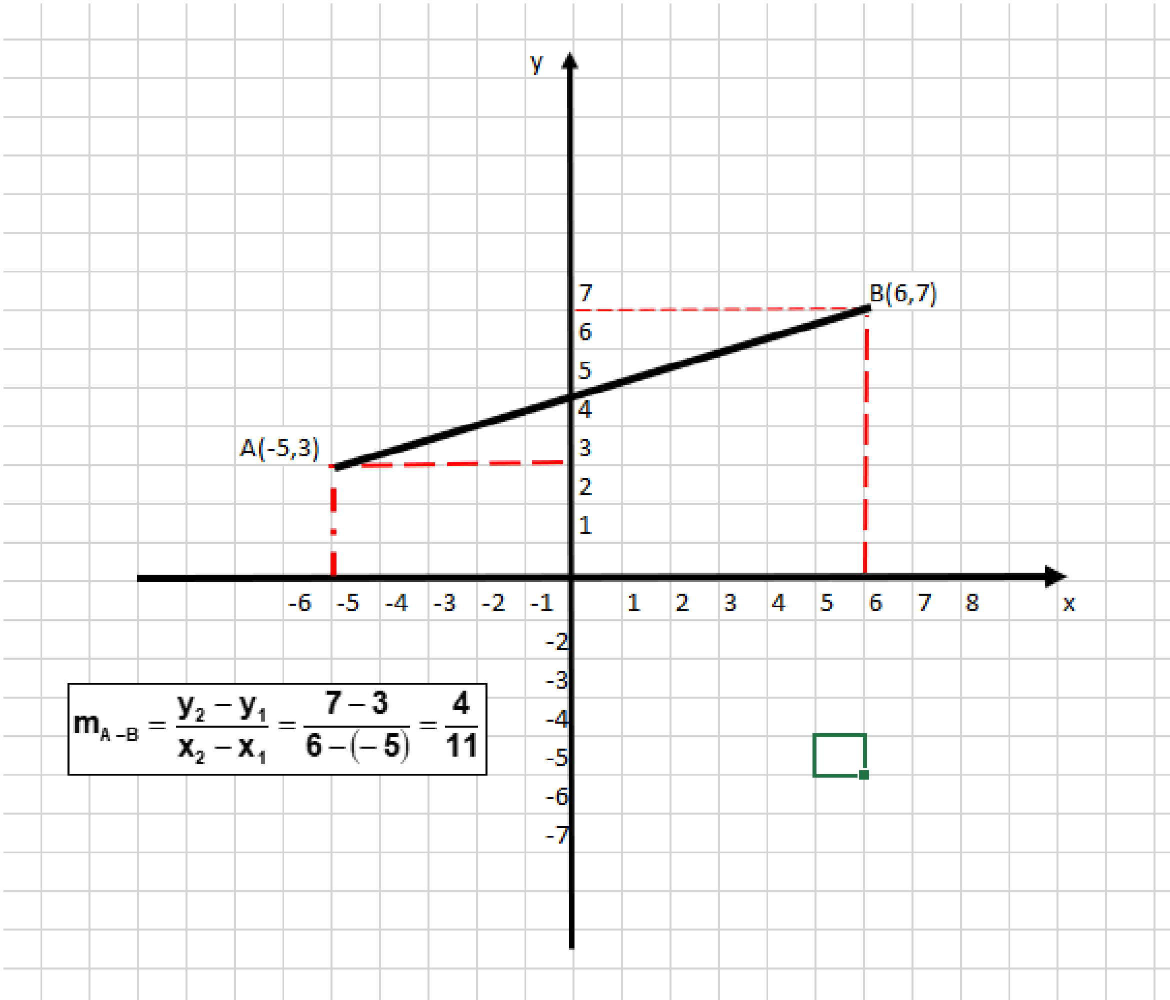
3.1 Gráficas

- Trazar el gráfico de una ecuación lineal de la forma y = mx + b.

3.2 Formas de una ecuación lineal

- Hallar las intersecciones en x y y de una recta dada su ecuación: Básico.
- Hallar la pendiente y la ordenada al origen de una recta dada su ecuación en la forma y = mx + b.
- Hallar la pendiente dados dos puntos en la recta.
- Hallar la pendiente dado el gráfico sobre una cuadrícula.
- Escribir la ecuación de una recta dados un punto y la ordenada al origen.
- Escribir una ecuación en forma pendiente ordenada al origen dados la pendiente y un punto.

- Iniciar la clase estableciendo e identificando las características de la función lineal.
- Realizar gráficas de diferentes funciones lineales.
- Motivar a los alumnos para que ubiquen las calles de una ciudad como un cuadrante de coordenadas (x) y (y).
- Proponer ejemplos de localización de puntos de un sistema de coordenadas.



Esta pantalla se obtuvo directamente del software que se está explicando en la computadora, para fines educativos.

- Motivar a los alumnos a buscar la aplicación de la función lineal en la vida diaria.
- Preparar con anticipación imágenes de diferentes gráficas de ecuaciones lineales.
- Escuchar a los alumnos y, sobre todo, responder a todas sus preguntas, mostrando siempre empatía con ellos.

Tema 4. Graficación de funciones cuadráticas

Contenido para el profesor ALEKS

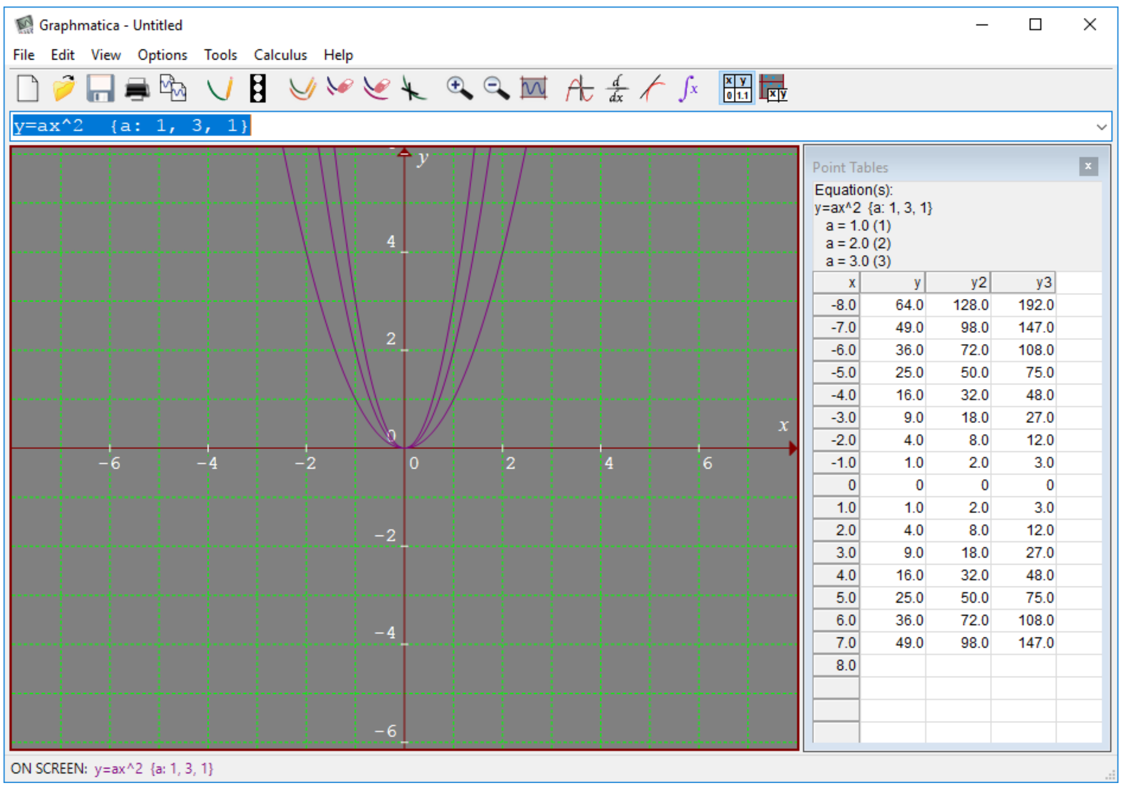
4.1 Elementos de una función cuadrática
Realiza lo siguiente en la explicación de clase:

- Utiliza una calculadora gráfica para hallar los ceros de una función cuadrática.
- Escribe una función cuadrática dados sus ceros.

- Reescribir una función cuadrática en forma general.
- Rango de una función cuadrática.
- Hallar las intersecciones con el eje x y el vértice de una parábola.
- Hallar el vértice, las intersecciones con el eje x y el eje de simetría del gráfico de una parábola.

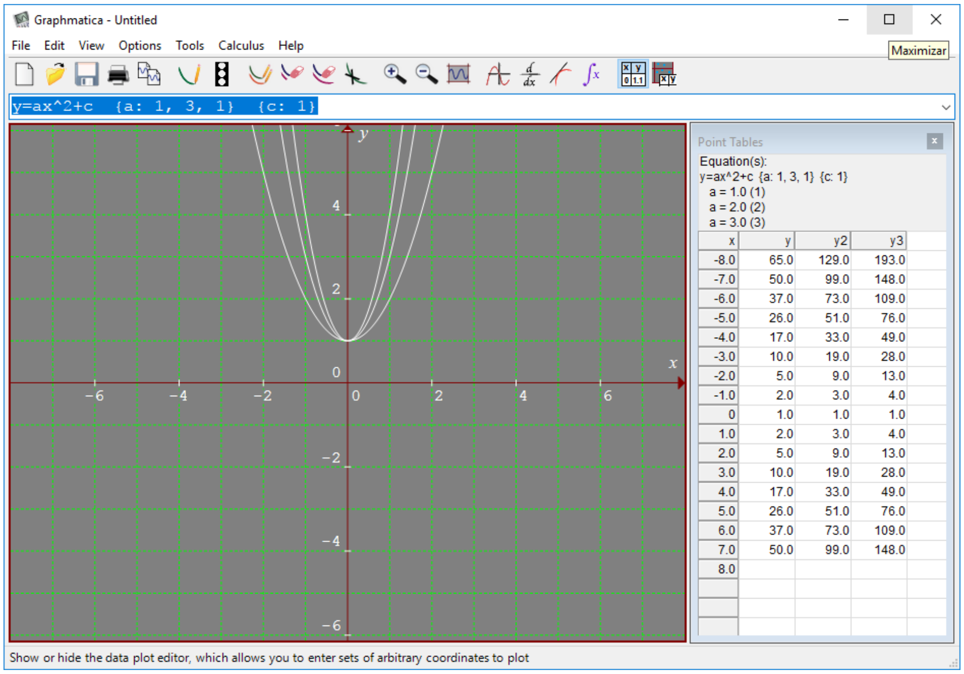
4.2 Comportamiento de una función cuadrática
Realiza lo siguiente en la explicación de clase:

- Traza el gráfico de una parábola de la forma $y = ax^2$.



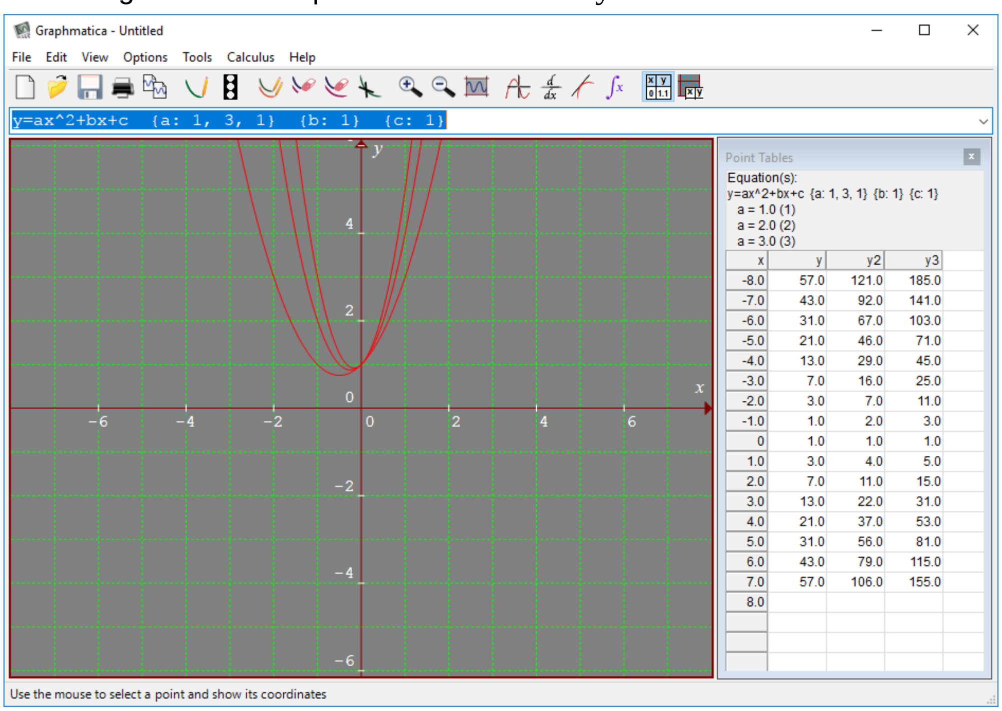
Esta pantalla se obtuvo directamente del software que se está explicando en la computadora, para fines educativos.

- Traza una parábola de la forma $y = ax^2 + c$.



Esta pantalla se obtuvo directamente del software que se está explicando en la computadora, para fines educativos.

- Traza el gráfico de una parábola de la forma $y = ax^2 + bx + c$.



Esta pantalla se obtuvo directamente del software que se está explicando en la computadora, para fines educativos.

Proyecta el siguiente video:

- PROFE JN el canal del ingeniero. (2014, 3 de octubre). *Movimiento parabolico, sus conceptos y aplicaciones* [Archivo de video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=NCUfgarMPuU

- Inicia el tema haciendo una referencia de las diferentes situaciones donde se puede encontrar una parábola.
- Haz recomendaciones o muestra ejemplos que hagan notar a los alumnos que, dependiendo del signo de la función, esta se abrirá hacia la zona positiva o negativa del sistema de ejes de coordenadas.
- Prepara ejemplos de las diferentes formas de analizar una expresión cuadrática.
- Motiva a los alumnos a emplear graficadores como el Graphmatica, DESMOS, Graphic Calculator, entre otros.

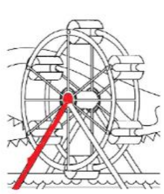
Tema 5. Modelando fenómenos con la función lineal y cuadrática

Contenido para el profesor ALEKS

5.1 Aplicaciones de la función lineal

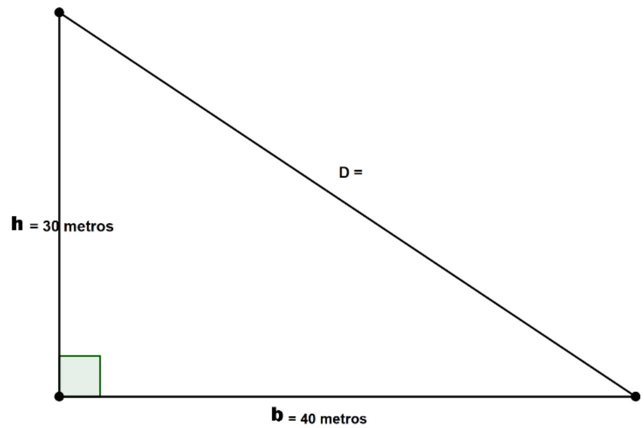
- Resolver un problema verbal con dos incógnitas utilizando una ecuación lineal.
- Dominio y rango de una función lineal que modela una situación del mundo real.
- Elegir un modelo cuadrático y utilizarlo para hacer una predicción.
- Seleccionar el gráfico que corresponde a una narración: Avanzado.

5.2 Aplicaciones de la función cuadrática
Ejemplo:



Un parque de diversiones planea instalar una rueda de la fortuna que tiene una altura de 30 metros, sabiendo que se empleará una base de 40 metros para sujetar los apoyos que detendrán a esta rueda. Determina la longitud de cada apoyo que sujetará a la rueda en ambos lados.

Solución:



$$\text{Hip}^{2} = (\text{Cat op})^2 + (\text{Cat ady})^2$$

Despejando a la hipotenusa

$$Hip = \sqrt{(\text{Cat op})^2 + (\text{Cat ady})^2}$$

Sustituyen do valores

$$Hip = \sqrt{(30)^2 + (40)^2}$$

$$Hip = \sqrt{(900)^2 + (1600)^2}$$

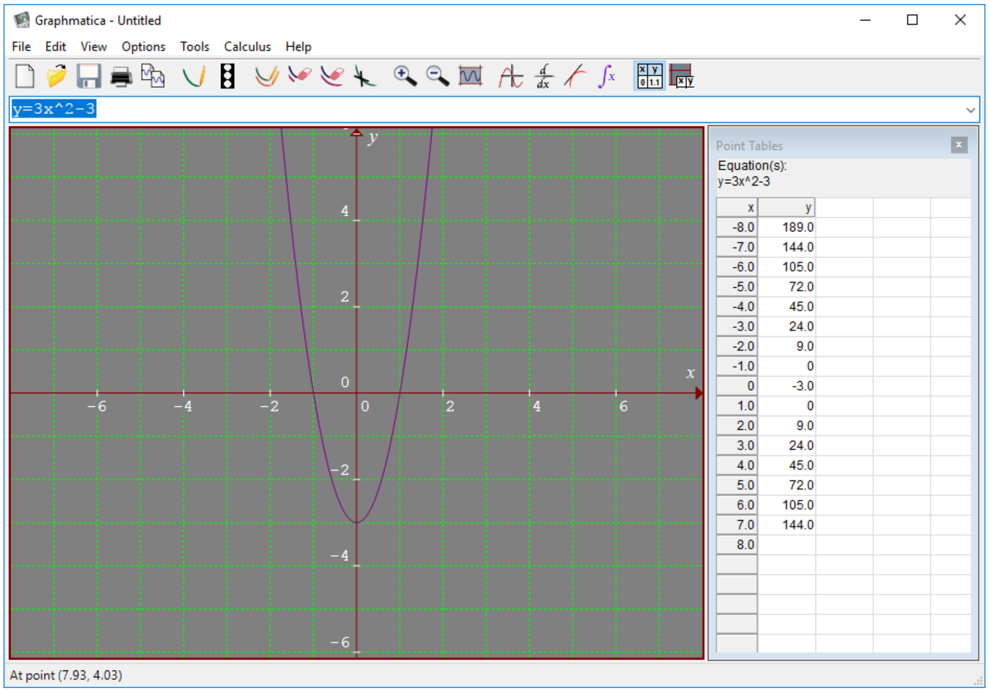
$$Hip = \sqrt{2500}$$

$$\text{Hip} = 50 \text{ metros}$$

Cada apoyo tendrá una longitud de 50 metros.

- Problema verbal que involucra el máximo o mínimo de una función cuadrática.

Determinar los máximos y mínimos de la siguiente función:



$$y = 3x^2 - 3.$$

$$y = 3x^2 - 3$$

Igualando a cero tenemos

$$y = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

Simplificando

$$3x^2 = 3$$

$$x^2 = \frac{3}{3}$$

$$x = \pm\sqrt{1}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -1$$

Realiza lo siguiente en la explicación de clase:

- Inicia el tema indicando la importancia de modelar matemáticamente un problema.
- Recomienda hacer uso de modelos en los cuales el alumno observe la relación entre la tasa de interés y el tiempo.
- Proyecta el video:

Universidad Tecmilenio

Juan Manuel Ricra Mayorca. (2013, 19 de agosto). *Modelación con funciones* [Archivo de video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=Ru8ARALyaf8

- Realiza problemas con gráficas que contengan diferentes datos y analiza el comportamiento de los mismos.
- Profesorenlinea. (s/f). *Formas de recopilar, organizar, procesar e interpretar datos en tablas y gráficos.* Recuperado de http://www.profesorenlinea.com.mx/matematica/Graficos.html

Módulo 2. Funciones polinomiales, racionales, exponenciales y logarítmicas

Una función polinomial es una función cuya regla está dada por un polinomio en una variable. El grado de una función polinomial es el grado del polinomio en una variable, es decir, la potencia más alta que aparece de x.
Este tipo de funciones tienen como dominio al conjunto de los números reales, sin embargo, su recorrido varía dependiendo del tipo de función.

En este módulo revisarás la información necesaria para obtener la gráfica de funciones polinomiales, y luego dirigirás tu atención a los cocientes (división) de las funciones polinomiales; esto es, a las funciones racionales. Posteriormente, te enfocarás en dos funciones trascendentales: La función exponencial y la función logarítmica. Revisarás estas funciones que tienen múltiples aplicaciones en la vida real.

Tema 6. Números complejos

6.1 Número imaginario

- Definición de número imaginario.

6.2 Número complejo

- Definición de número complejo.

6.3 Operaciones con números complejos

- Multiplicar números complejos.
- Multiplicar expresiones que involucran conjugados complejos.
- Hallar un polinomio de un grado dado con ceros dados: Ceros complejos.
- Utilizar *i* para reescribir las raíces cuadradas de números negativos.
- Resolver una ecuación cuadrática con raíces complejas.

Realiza lo siguiente en la explicación de clase:

- Inicia el tema presentando los conceptos de número imaginario y complejo.

Un número imaginario es aquel que resulta de las soluciones de ecuaciones, cuyos resultados no pertenecen al conjunto de los números reales. Los números imaginarios son aquellos que proceden de una raíz cuadrada de un número negativo, dado que no existe un número real elevado al cuadrado del que se obtenga un resultado negativo.

Todo número imaginario tiene a $\sqrt{-1}$ como factor. El número $\sqrt{-1}$ es llamado unidad imaginaria. Se representa por medio de la letra *i*, es decir, $\sqrt{-1}$ = *i*.

El sistema de números reales es parte de un sistema de números aún más grandes llamado sistema de números complejos.

Todo número complejo está definido por una parte real y otra imaginaria, y tiene la forma $\boldsymbol{a+bi}$.

- Fomenta la lluvia de ideas por parte de los alumnos para identificar y establecer los conceptos de números imaginarios y complejos.
- Se recomienda realizar operaciones básicas con los números complejos.

Los números complejos, como cualquier otro número, pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse. Para realizar estas operaciones, deberás tomar en cuenta las potencias de *i* que se definen a continuación:

Potencias de *i*

$\sqrt{-1} = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = i^2 * i = -1i = -i$
$i^4 = i^2 * i^2 = (-1)(-1) = 1$

Resuelve el siguiente ejercicio:

Resta $\left(9-\sqrt{-27}\right)-\left(-4+\sqrt{-48}\right)$

<u>Pasos</u>

Para poder realizar esta operación, es necesario restar términos semejantes. Los términos semejantes se dividen en reales e imaginarios; por lo tanto, se suman los reales con los reales y los imaginarios con los imaginarios, pero antes se puede aplicar la propiedad para simplificar los números imaginarios a la forma *bi.*

<u>Procedimiento</u>

$$\left(9-\sqrt{-27}\right)-\left(-4+\sqrt{-48}\right)$$
$$\left(9-\sqrt{-1}\sqrt{(9)(3)}\right)-\left(-4+\sqrt{-1}\sqrt{(16)(3)}\right)$$
$$\left(9-3i\sqrt{3}\right)-\left(-4+4i\sqrt{3}\right)$$
$$9-3i\sqrt{3}+4-4i\sqrt{3}$$
$$(9+4)+\left(-3i\sqrt{3}-4i\sqrt{3}\right)$$
$$13-7i\sqrt{3}$$

Resultado

$$13-7\sqrt{3}i$$

- Se sugiere estudiar los siguientes videos:
  UNPROFESOR. (2017). *Los números complejos* [Archivo de video]. Recuperado de https://www.unprofesor.com/matematicas/aritmetica/los-numeros-complejos/
- UNPROFESOR. (2017). *Qué son los números complejos o imaginarios* [Archivo de video]. Recuperado de https://www.unprofesor.com/matematicas/que-son-los-numeros-complejos-o-imaginarios-1043.html
- Se recomienda invitar a los alumnos a establecer la diferencia entre estos y los números reales.
- Se sugiere que los estudiantes realicen una investigación sobre la aplicación de los números complejos.
- Motivar a los alumnos a realizar un sumario que contenga las reglas básicas para trabajar este tipo de números.
- Si el tiempo lo permite, dividir al grupo en equipos de trabajo para debatir sobre cuáles son las características de los números complejos.
- Hacer uso de un foro en el que los alumnos puedan compartir una lluvia de ideas, con las características que consideren necesarias de los números complejos.

Tema 7. Funciones polinomiales

7.1 Gráfica de una función polinomial

- Trazar el gráfico de una recta dada su ecuación en forma general.
- Escribir la ecuación de una función cuadrática dado su gráfico.

7.2 Teorema del factor y del residuo

- El teorema del factor.

- Utilizar el teorema del residuo para evaluar un polinomio.
- División sintética.

7.3 Factorización de polinomios: Teorema de los ceros racionales

- Hallar todos los posibles ceros racionales utilizando el teorema de los ceros racionales: Problema tipo 1.
- Hallar un polinomio de un grado dado con ceros dados: Ceros complejos.
- Utilizar un cero dado para escribir un polinomio como un producto de factores lineales: Ceros reales.
- Utilizar el teorema de los ceros racionales para hallar todos los ceros de un polinomio: Ceros racionales.

Realiza lo siguiente en la explicación de clase:

- Comienza explicando la forma genérica que contienen las funciones polinomiales $y = a_n x^n \pm a_{n-1}x^{n-1} \pm a_{n-2}x^{n-2} \pm .... \pm a_0$.
- Se recomienda invitar a los alumnos primeramente a realizar gráficas de estas funciones polinomiales usando su calculadora para identificar en las mismas el grado, el coeficiente principal, el número de raíces y el número de crestas.

Ejemplo:

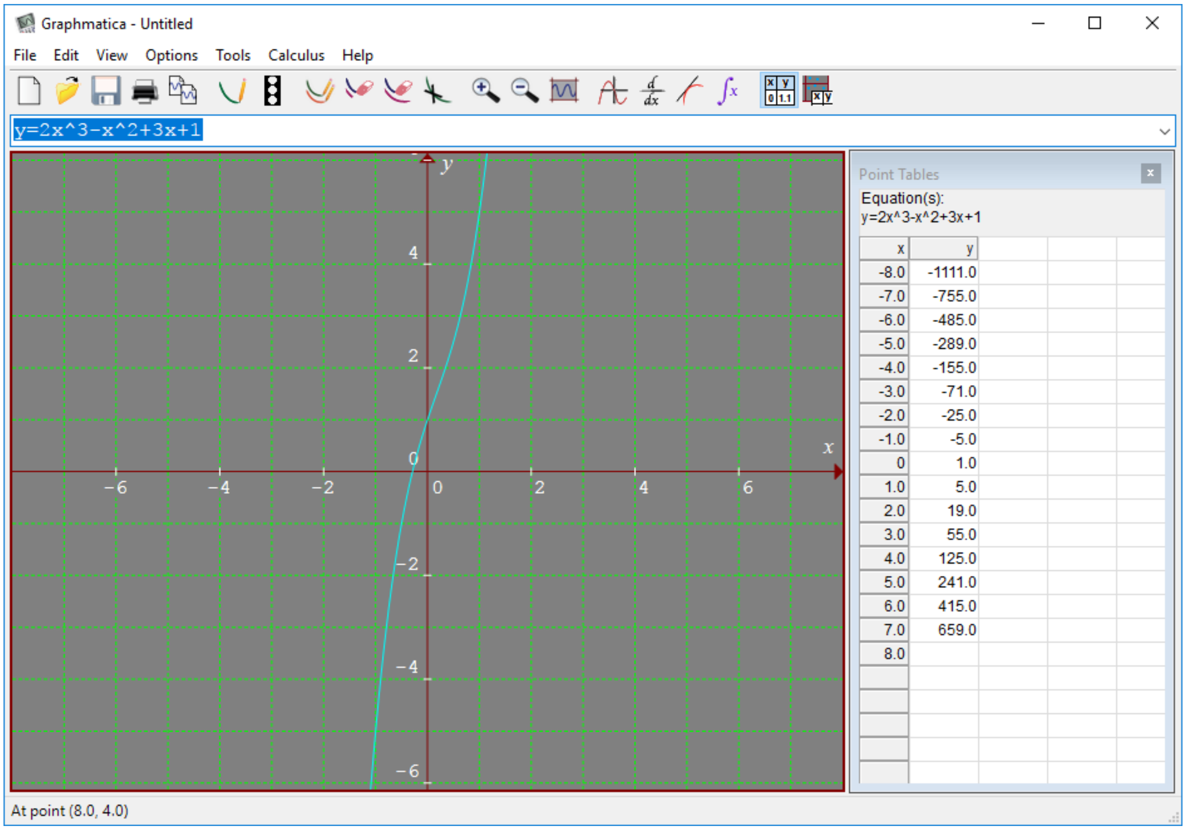
Dado el siguiente polinomio $y = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$, determina lo siguiente:

a. El grado.
b. Coeficiente principal.
c. Número de raíces o ceros.
d. Número de vueltas.

Solución:

a. 3er grado (es la mayor potencia x^3).
b. Coeficiente principal: 2, ya que es el número que acompaña al término con mayor potencia, en este caso $2x^3$ (observa que cuando el coeficiente principal es positivo, la gráfica termina abajo del eje x).
c. Número de raíces o ceros: 3 raíces o ceros, ya que el grado del polinomio es tres.
d. Número de vueltas: 3 - 1 = 2.

Si trazamos la gráfica de este polinomio usando graphmatica, obtenemos lo siguiente:



Esta pantalla se obtuvo directamente del software que se está explicando en la computadora, para fines educativos.

- Se sugiere presentar problemas de oferta y demanda de un producto. Por ejemplo, si un consumidor desea adquirir cualquier producto, este depende del precio en que el artículo esté disponible y sus características.
- Se invita al profesor a emplear diferentes tipos de graficadores que le permitan al alumno identificar rápidamente los elementos mencionados en el punto anterior (Graphmatica, DESMOS Graphic Calculator, entre otros).
- Presentar ejemplos de tiro parabólico aplicado a diferentes disciplinas.
- Se recomienda reafirmar el concepto de división de polinomios para que sean aplicados en la explicación de los teoremas del factor y del residuo, además de la división sintética.

- Se sugiere mencionar a los alumnos que a las aplicaciones de estos conceptos se les conoce como teoría de ecuaciones. Para ello se pueden consultar los siguientes autores:

De Burgos, J. (2006). *Álgebra Lineal*. México: McGraw Hill.

Murray, S., y Spiegel, P. (1998). *Álgebra superior*. México: McGraw Hill.

Tema 8. Funciones racionales

8.1 Definición de una función racional y su dominio

- Dominio de una función racional.

8.2 Asíntotas verticales y horizontales

- Hallar las asíntotas de una función racional: Constante sobre lineal.
- Hallar las asíntotas de una función racional: Lineal sobre lineal.
- Hallar las asíntotas de una función racional: Avanzado.
- Parear gráficos con funciones racionales: Dos asíntotas verticales.

8.3 Modelando fenómenos con la función racional

- Evaluar una función racional: Problema tipo 1.
- Evaluar una función racional: Problema tipo 2.

Realiza lo siguiente en la explicación de clase:

- Inicia el tema presentando los conceptos de función racional y su dominio.

Las funciones racionales surgen de dividir dos polinomios:

$$y = f_{(x)} = \frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}}$$

Donde $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ son polinomios

El dominio de este tipo de funciones son todos los números reales, excepto aquellos valores donde el polinomio Q (x) = 0.

- Se sugiere que plantees diferentes ejemplos de funciones racionales aplicados a la vida diaria del estudiante. Para ello puedes consultar la siguiente página: calculo.cc. (s.f). *Ejercicios de funciones racionales.* Recuperado de http://calculo.cc/temas/temas_bachillerato/primero_ciencias_sociales/funciones_elementales/problemas/p_racionales.html

- Invita al estudiante a buscar en su ámbito el uso de este tipo de funciones.
- Establece e identifica las características de las asíntotas verticales y horizontales.

<u>Asíntotas verticales</u>

Las asíntotas verticales se obtienen al igualar a cero el denominador de la función racional:

$$y = f_{(x)} = \frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}}$$

Es decir, donde *Q (x)* = 0

De manera más formal:

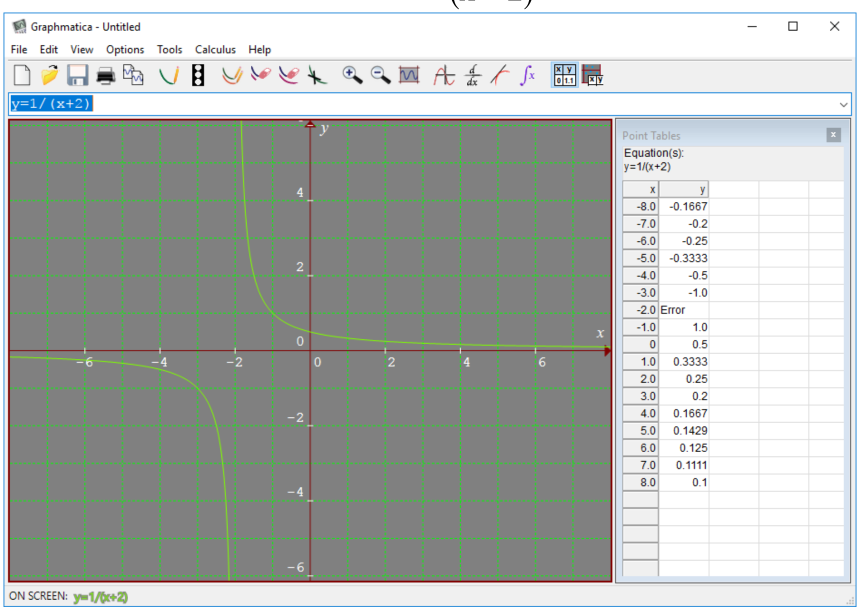
La recta *x* = *a* es una asíntota vertical si se cumple cualquiera de los siguientes enunciados:

$$Lim_{x \to a^-} f_{(x)} = \infty$$
$$Lim_{x \to a^+} f_{(x)} = \infty$$

Ejemplo:

Usando Graphmatíca, realizar la gráfica de la siguiente función:

$$y = f_{(x)} = \frac{1}{(x-2)}$$



Esta pantalla se obtuvo directamente del software que se está explicando en la computadora, para fines educativos.

<u>Dominio y asíntotas verticales</u>

$$x \in R - \{2\}$$

$$\text{Lim}_{x \to 2^-} \frac{1}{(x-2)} = \frac{1}{0^-} = \infty$$

o

$$\text{Lim}_{x \to 2^+} \frac{1}{(x-2)} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

Por lo tanto, $x = 2$ es una asíntota vertical

- Relacionar este tipo de funciones con el concepto de límite de una función.
- Explicar el concepto de asíntotas horizontales y verticales a través del concepto de límite de una función.
- Exponer diferentes tipos de ejemplos de aplicación a diferentes áreas del conocimiento.
- Formar foros de discusión para el análisis de este tipo de funciones.
- Para facilitar la comprensión del tema, como actividad complementaria, pide a los alumnos, a manera de ejercicio, lo siguiente:
    a. Definir el concepto de función racional.
    b. Definir el concepto de dominio de una función racional.

Tema 9. Funciones exponenciales y logarítmicas

9.1 Ecuación y gráfica de la función exponencial base *a* y natural

- Escribir una función exponencial dada una tabla de pares ordenados.
- Resolver una ecuación exponencial mediante la búsqueda de bases comunes: Exponentes lineales.

9.2 Ecuación y gráfica de la función logarítmica

- Gráfico, dominio y rango de una función logarítmica.
- Propiedades básicas de logaritmos.
- Cambio de base para logaritmos: Problema tipo 1.
- Escribir una expresión como un logaritmo sencillo.
- Expandir una expresión logarítmica: Problema tipo 1.
- Conversión entre ecuaciones logarítmicas y exponenciales.
- Conversión entre ecuaciones logarítmicas naturales y exponenciales.
- Resolver una ecuación de múltiples pasos que involucra un logaritmo sencillo.

9.3 Modelando fenómenos con la función exponencial y logarítmica

- Evaluar una función exponencial con base en el modelado de una situación del mundo real.
- Elegir un modelo exponencial y utilizarlo para hacer una predicción.

Realiza lo siguiente en la explicación de clase:

- Inicia la clase haciendo una reflexión sobre la importancia de las funciones exponenciales y logarítmicas en los diferentes eventos de la vida diaria, tales como las finanzas, la bioestadística, etcétera.
- Se sugiere que comiences con las propiedades de la gráfica de la función exponencial de una base determinada.
- Puedes consultar los siguientes autores:

  De Burgos, J. (2006). *Álgebra Lineal*. México: McGraw Hill.

  Murray, S., y Spiegel, P. (1998). *Álgebra superior*. México: McGraw Hill.

Función exponencial

Para cualquier número real $a > 0$ y $a \neq 1$.

$y = f(x) = a^x$ es una función exponencial.

Se caracteriza por tener un factor de cambio constante, es decir, podemos identificar un número que al multiplicarlo por un término obtenemos el siguiente término:

Ecuación general

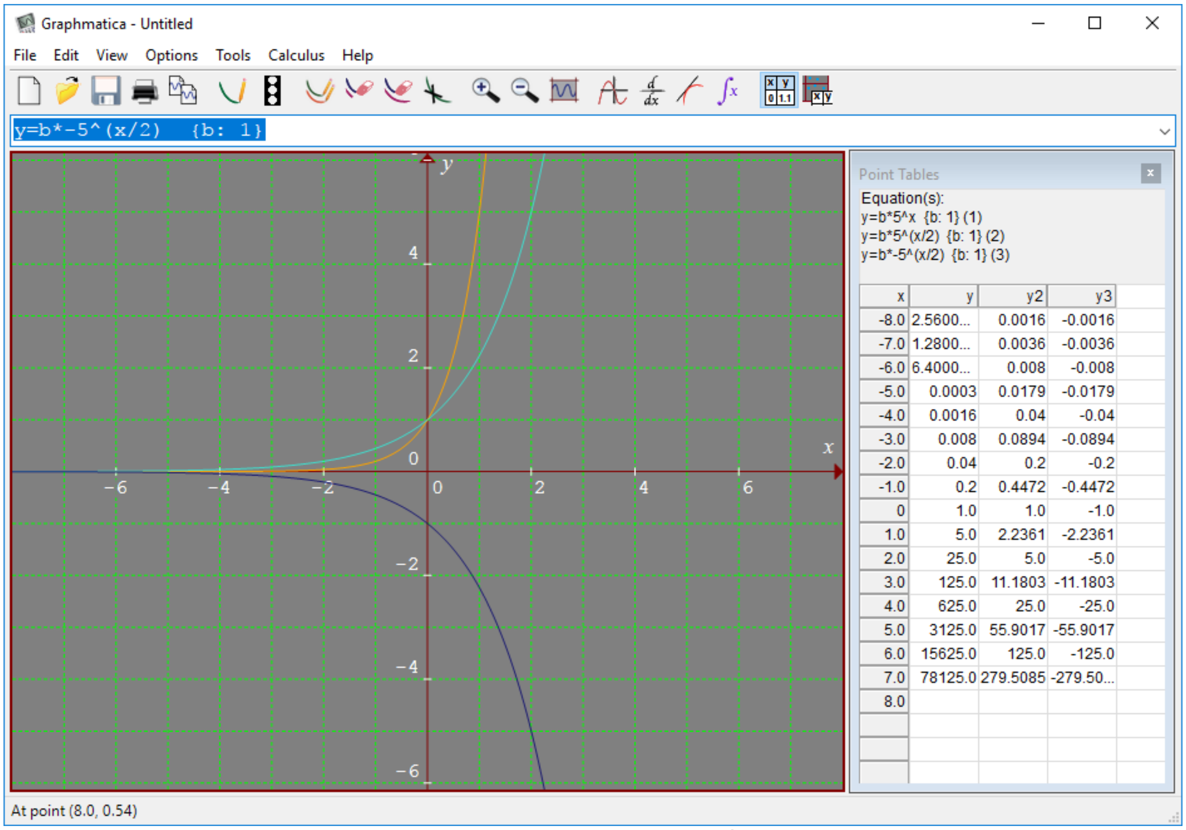
Si el valor de “x” cambia de 1 en 1.

$y = b \cdot a^x$

Donde *a* (número positivo diferente de 1) representa el factor de cambio en la función, y se obtiene dividiendo los términos dependientes de la función; *b* es la intersección con el eje *y* (el valor de *y* cuando $x = 0$), al que llamaremos valor inicial.

Si el valor de *x* cambia de *n* en *n.*

$$y = ba^{(x/n)}$$



x	y	y2	y3
-8.0	2.5600...	0.0016	-0.0016
-7.0	1.2800...	0.0036	-0.0036
-6.0	6.4000...	0.008	-0.008
-5.0	0.0003	0.0179	-0.0179
-4.0	0.0016	0.04	-0.04
-3.0	0.008	0.0894	-0.0894
-2.0	0.04	0.2	-0.2
-1.0	0.2	0.4472	-0.4472
0	1.0	1.0	-1.0
1.0	5.0	2.2361	-2.2361
2.0	25.0	5.0	-5.0
3.0	125.0	11.1803	-11.1803
4.0	625.0	25.0	-25.0
5.0	3125.0	55.9017	-55.9017
6.0	15625.0	125.0	-125.0
7.0	78125.0	279.5085	-279.50...
8.0			

Esta pantalla se obtuvo directamente del software que se está explicando en la computadora, para fines educativos.

- Motivar a los alumnos a investigar las diferentes aplicaciones que tienen las funciones exponenciales en su mundo diario.
- Presentar ejemplos de aplicación al mundo de las finanzas, la biología, la medicina, entre otros.
- Presentar las diferentes propiedades de los logaritmos aplicadas a la solución de ecuaciones diferenciales.
- Explicar la forma en que se solucionan los diferentes tipos de ecuaciones logarítmicas.

Resolver una ecuación logarítmica es encontrar el valor de *x* que hace que la ecuación sea verdadera, revisa los siguientes ejemplos:

$$a^b = c$$

$$\log_a C = b$$

Resuelve la siguiente ecuación: $log_2 32 = x + 9$.

Paso 1: Se convierte la función logarítmica a una función exponencial: $32 = 2^{x+9}$.

Paso 2: Se factoriza al 32.

32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

Por lo tanto $\boxed{32 = 2^5}$

Paso 3: Se sustituye este valor en la ecuación exponencial $2^5 = 2^{x+9}$.

Paso 4: Como las bases son iguales, aplicando leyes de exponentes queda: $5 = x + 9$.

Paso 5: Despejando *x*, se obtiene lo siguiente:

$$5 = x + 9$$
$$5 - 9 = x$$
$$-4 = x$$

Paso 6: Interpretamos el resultado:

$$\log_2 32 = x + 9$$
$$\log_2 32 = -4 + 9$$
$$\log_2 32 = 5$$

- Establecer un foro de discusión donde los alumnos comenten lo que observaron durante este tema.
- Para conocer más sobre una función exponencial, revisa el siguiente video: AcademiaVasquez. (2012, 3 de abril). *Funciones de uso frecuente (Parte 8): Función Exponencial* [Archivo de video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=MMQ--yo2gJY

Tema 10. Funciones seccionadas

10.1 Gráfica de funciones seccionadas

- Trazar el gráfico de una función definida por trozos.

10.2 Función escalón

- Evaluar una función definida por trozos.

Realiza lo siguiente en la explicación de clase:

- Puedes iniciar la clase haciendo una reflexión sobre la importancia de las funciones seccionadas en el análisis de funciones.

Las funciones seccionadas (definidas por trozos) están compuestas por un grupo de funciones individuales en una sola función.

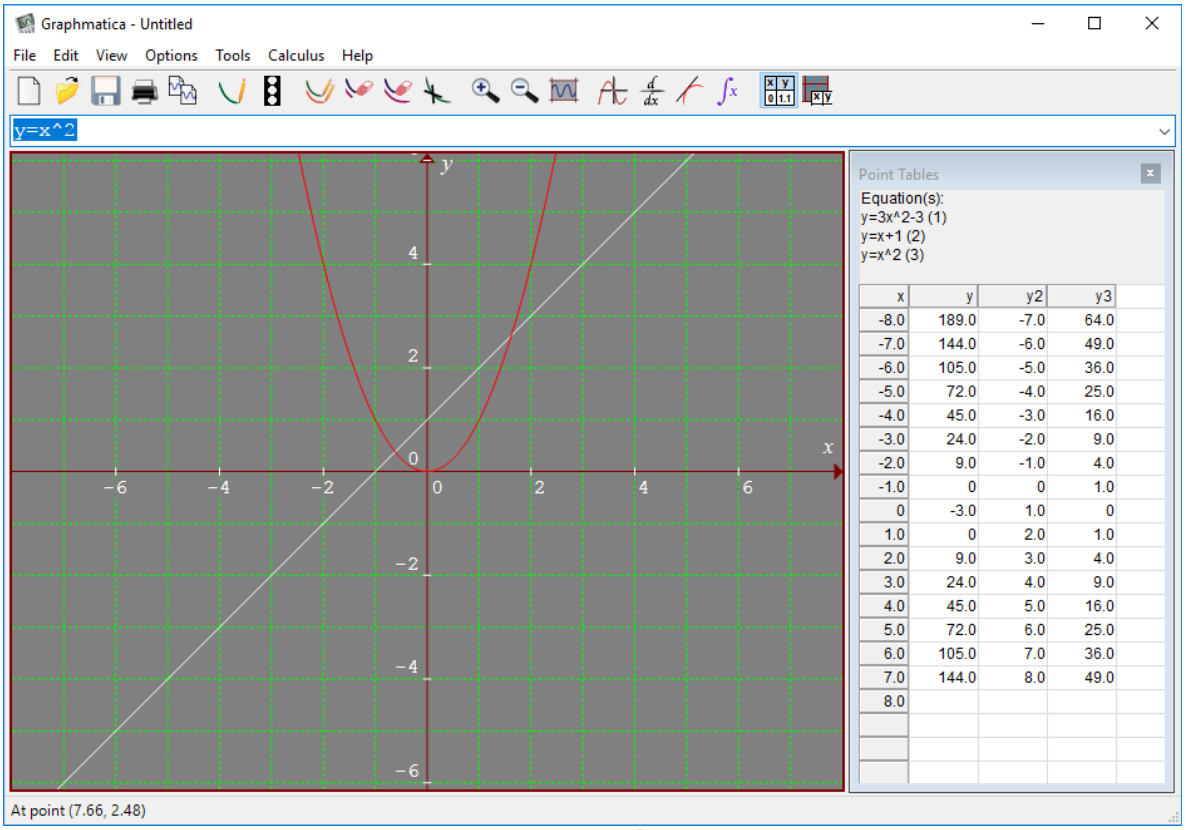
Por ejemplo, $\begin{matrix} f_{(x)} = x+1 \\ f_{(x)} = x^2 \end{matrix}$ son funciones individuales.

Pero si defines $f_{(x)} = \begin{cases} x+1 \\ x^2 \end{cases}$, es una función seccionada, porque se compone de por lo menos dos funciones individuales.

Entonces, para determinar si una función es seccionada, esta debe estar compuesta por varias funciones individuales.

Ejemplo:
Encuentra la gráfica de la siguiente función seccionada y determina su dominio e imagen:

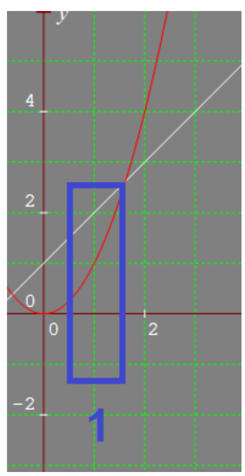
$$y = \left\{ \begin{matrix} x+1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{matrix} \right\}$$



Esta pantalla fue obtenida directamente del software que se está explicando en la computadora, para fines educativos.

La sección fraccionada restringe el dominio de estas funciones:

$$\text{Dominio} \;:(-\infty,+\infty)$$
$$\text{Imagen} \;:(-\infty,+\infty)$$



Esta pantalla fue obtenida directamente del software que se está explicando en la computadora, para fines educativos.

- Se sugiere que expliques las condiciones bajo las cuales se definen este tipo de funciones.
- Explica que este tipo de funciones son definidas a través de las distintas partes de su dominio.
- Motiva al alumno a comprender y usar los siguientes términos: $\infty, \in, \notin, \geq, \leq, [\ ], (\ ), <, >$.
- Cuando el alumno haya desarrollado el planteamiento, ayúdalo en la interpretación de los resultados de las mismas.
- Forma foros de trabajo en los cuales supervises la forma en que los alumnos analizan un problema, interpretan la información, plantean la función y evalúan el resultado final.

Módulo 3. Ecuaciones lineales y aplicaciones

Aunque la mayoría de las personas no piensan en fórmulas o ecuaciones, sí emplean los datos relacionados para llegar a la respuesta de una situación problemática.

Lo que se hará es practicar el planteamiento de los problemas comunes o de ámbito laboral que podrían presentarse en diferentes escenarios y encontrar soluciones para dar respuesta a la problemática que te interesa.

En el caso de un sistema de ecuaciones lineales, se debe empezar por clarificar que ya no se trata solo de una ecuación, sino de un sistema.

El sistema puede aumentar al considerar dos o más variables. Las ecuaciones o condiciones que se deben cumplir están dadas por más de una ecuación.

Trabajarás inicialmente con un sistema de dos ecuaciones y dos variables; una vez que los conceptos nos sean conocidos, el método puede extenderse a más variables.

El hecho de que el sistema sea lineal tiene que ver con la representación gráfica que se puede hacer de las ecuaciones; es decir, que la gráfica de las ecuaciones lineales es una recta en el plano x, y.

Tema 11. Funciones inversas

11.1 Funciones inversas

- Definición.
- Funciones inversas: Problema tipo 1.
- Funciones inversas: Problema tipo 2.

Realiza lo siguiente en la explicación de clase:

Explicar que dada una función uno a uno f, existe una función relacionada f^{-1}, que es el *inverso de* f.

Ejemplo:

 Tenemos la función uno a uno

$g(x) = 3x - 14$

Utilizar el método de preferencia del profesor.
La composición de una función con su inversa siempre resulta en un valor de salida igual al valor de entrada.
Es decir, para cualquier valor de entrada.

Tema 12. Composición de funciones

12.1 Introducción

- Introducción a la composición de dos funciones.

12.2 Composición

- Composición de dos funciones: Dominio y rango.
- Expresar una función como una composición de dos funciones.
- Composición de dos funciones: Básico.
- Composición de dos funciones: Avanzado.

Realiza lo siguiente en la explicación de clase:

- Inicia la clase con la definición del concepto de composición de funciones.
- Explica los diferentes tipos de composiciones.

Objetivo: Obtener la función compuesta, el dominio y el rango de la función compuesta.

Tema 13. Resolución de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas

11.1 Método gráfico

11.2 Método de sustitución

11.3 Método de suma y resta

- Resolver un sistema de ecuaciones lineales gráficamente.
- Resolver un problema verbal con dos incógnitas utilizando una ecuación lineal.
- Reconocer el modelo algebraico de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas.
- Resolver / interpretar sistemas de ecuaciones de dos incógnitas mediante métodos numéricos/algebraicos.
- Expresar y solucionar situaciones utilizando sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.

Realiza lo siguiente en la explicación de clase:

- Inicia el tema indicando la importancia de la resolución de sistemas de ecuaciones por diferentes métodos de solución.
- Define los sistemas y métodos de solución de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Definición
Es un conjunto de dos incógnitas que tienen soluciones iguales, es decir, que ambas soluciones satisfacen a cada una de las ecuaciones dadas. La solución de un sistema de ecuaciones requiere tantas ecuaciones independientes como incógnitas por determinar.

Métodos de solución
Para resolver un sistema de ecuaciones lineales, debes determinar los valores de las incógnitas que satisfacen a cada ecuación dada.

El proceso consiste en eliminar una de las dos incógnitas, para generar una ecuación lineal con una sola incógnita; una vez determinado el valor de la incógnita de la ecuación generada, se sustituye en cualquier ecuación del sistema para obtener el valor de la otra incógnita.

- Para conocer más sobre solución de sistemas de ecuaciones lineales, revisa los siguientes videos:
  KhanAcademy. (2016). Completar soluciones de ecuaciones de dos variables [Archivo de video]. Recuperado de https://es.khanacademy.org/math/algebra/two-var-linear-equations/solutions-to-two-var-linear-equations/v/graphing-solutions-to-2-variable-linear-equations-1

- Puedes explicar el método se sustitución mencionando que el objetivo es reducir el sistema a una sola ecuación y una incógnita.

Pasos

1. Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.
2. Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo una ecuación con una sola incógnita.
3. Se resuelve la ecuación.
4. El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada.
5. Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

$$\frac{x}{2} + y = 4$$

$$3x + \frac{y}{4} = 6$$

Despejando a (y) de la ecuación 1, y sustituyen do en la 2

$$y = 4 - \frac{x}{2}$$

$$3x + \frac{1}{4}\left(4 - \frac{x}{2}\right) = 6$$

Simplifica ndo

$$3x - \frac{x}{8} = 6 - 1$$

Resolviend o

$$X = \frac{40}{23}$$

Sustituyen do en (y)

$$y = 4 - \frac{1}{2}\left(\frac{40}{23}\right)$$

$$y = \frac{72}{23}$$

- Método gráfico

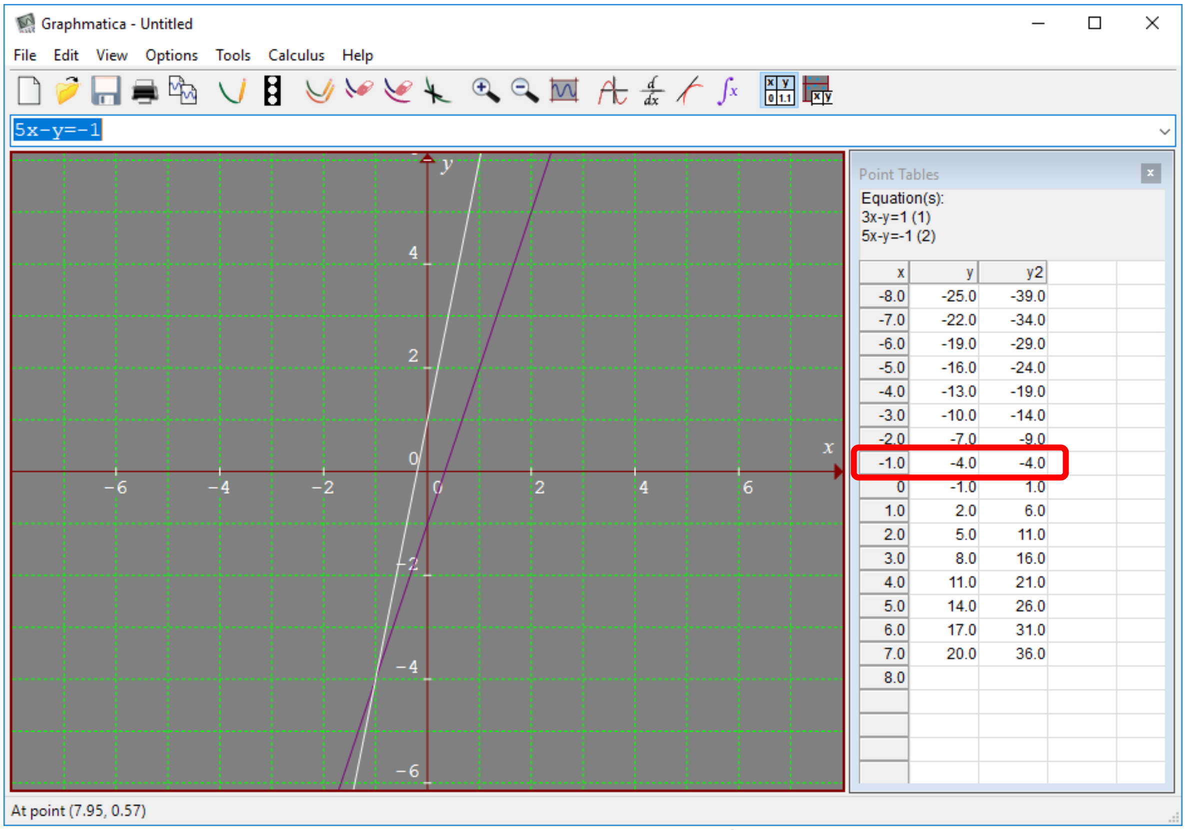
Consiste en representar gráficamente cada una de las rectas, el punto donde se intercepten será la solución.

Ejemplo:

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$3x - y = 1$$

$$5x - y = -1$$



x	y	y2
-8.0	-25.0	-39.0
-7.0	-22.0	-34.0
-6.0	-19.0	-29.0
-5.0	-16.0	-24.0
-4.0	-13.0	-19.0
-3.0	-10.0	-14.0
-2.0	-7.0	-9.0
-1.0	-4.0	-4.0
0	-1.0	1.0
1.0	2.0	6.0
2.0	5.0	11.0
3.0	8.0	16.0
4.0	11.0	21.0
5.0	14.0	26.0
6.0	17.0	31.0
7.0	20.0	36.0
8.0		

Esta pantalla se obtuvo directamente del software que se está explicando en la computadora, para fines educativos.

- Asegúrate de que los alumnos comprendan que en los sistemas de ecuaciones lineales se llega al mismo resultado, independientemente del método que se emplee.

Tema 14. Resolución de sistemas de ecuaciones con tres incógnitas

12.1 Método de sustitución
12.2 Método de suma y resta

- Tablas para ecuaciones lineales.
- Resolver un sistema de ecuaciones lineales utilizando eliminación con suma.
- Resolver un sistema de ecuaciones lineales utilizando sustitución.
- Resolver un problema verbal con tres incógnitas utilizando una ecuación lineal.

Realiza lo siguiente en la explicación de clase:

- Inicia el tema dando una explicación sobre el método de suma y resta.

Método de suma y resta

Ejemplo:

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$1)\ -x-2y+2z=9$$
$$2)\ 2x+y-z=-3$$
$$3)\ 3x-2y+z=-6$$

Paso 1: Selecciona la variable a eliminar.

Se selecciona a la variable (x)

Paso 2: Multiplica las ecuaciones por los coeficientes cruzados de cada ecuación, de tal forma que quede el mismo coeficiente en ambas ecuaciones, pero con signos contrarios.

Utilizando las ecuaciones 1) y 2)

$$1)\left(-x-2y+2z=9\right)*(2)$$
$$2)\ \left(2x+y-z=-3\right)*(1)$$

Al multiplicar, se obtiene el siguiente sistema:

$$1)\ -2x-4y+4z=18$$
$$2)\ 2x+y-z=-3$$

Utilizando las ecuaciones 1) y 3).

$$1)\left(-x-2y+2z=9\right)*(3)$$
$$3)\ \left(3x-2y+z=-6\right)*(1)$$

Al multiplicar se obtiene el siguiente sistema:

$$1)\ -3x-6y+6z=27$$
$$3)\ 3x-2y+z=-6$$

Paso 3: Suma las ecuaciones y, por lo general, llegarás a un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas.

$$\begin{array}{ll} 1) & -2x-4y+4z=18 \\ 2) & \ \ 2x+y-z=-3 \\ \hline 4) & \qquad -3y+3z=15 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 1) & -3x-6y+6z=27 \\ 3) & \ \ 3x-2y+z=-6 \\ \hline 5) & \qquad -8y+7z=21 \end{array}$$

Paso 4: Nuevamente, aplica el método de suma y resta para el sistema de 2 ecuaciones y obtén la solución.

Las ecuaciones resultantes son:

$$4)\ -3y+3z=15$$
$$5)\ -8y+7z=21$$

Entonces:

$$4)\left(-3y+3z=15\right)*(-8)$$
$$5)\left(-8y+7z=21\right)*(3)$$

Al multiplicar se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{array}{l} 4)\ \ 24y-24z=-120 \\ \underline{5)-24y+21z=63} \\ \qquad -3z=-57 \end{array}$$

Sustituyendo este valor de $z=19$ en la ecuación 4):

$$4)\ -3y+3(19)=15$$
$$-3y+57=15$$
$$-3y=-42$$

Sustituyendo este valor de $z=19$ y $y=14$ en la ecuación 1):

$$1)\ -x-2(14)+2(19)=9$$
$$-x-28+38=9$$
$$-x+10=9$$
$$-x=-1$$

Paso 5: Determinar las soluciones:

$$\begin{array}{l} x=1 \\ y=14 \\ z=19 \end{array}$$

- Explica el método de sustitución
- Forma equipos que se encarguen de analizar y resolver diferentes sistemas de ecuaciones con tres incógnitas.

- Para conocer más sobre ecuaciones con tres incógnitas, revisa el siguiente video: math2me. (2010, 12 de agosto). Sistemas de ecuaciones 3x3│método de eliminación [Archivo de video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=B22frOUHM-4

- Para conocer la solución de sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas te invitamos a ver el siguiente video:
  Tutor Expertos. (2013, 10 de abril). Sistema De Ecuaciones Lineales Con Tres Incógnitas (Parte 1) [Archivo de video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=gtgJBI808Wg

Tema 15. Modelación de sistemas de ecuaciones lineales en situaciones de la vida real

15.1 Aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales

- Hallar la cantidad inicial y la tasa de cambio dado el gráfico de una función lineal.
- Interpretar los parámetros de una función lineal que modela una situación del mundo real.
- Identificar ecuaciones de variación directa e inversa

- Evaluar una función exponencial que modela una situación de la vida real
- Hallar dónde una función aumenta, disminuye o es constante a partir de su gráfico: Notación de intervalos
- Problema verbal que involucra el máximo o mínimo de una función cuadrática

Ejemplo:

Considerando que 12 bultos de cemento y 6 bultos de yeso cuestan $1020, mientras que 9 bultos de cemento y 13 bultos de yeso cuestan $1530. Determina lo siguiente:

¿Cuánto cuesta cada bulto de cemento y de yeso?

$$12c + 6y = 1020$$
$$9c + 13y = 1530$$

Despejando c de la ecuación 1

$$c = \frac{1020 - 6y}{12}$$

Sustituyendo en la ecuación 2

$$9\left(\frac{1020 - 6y}{12}\right) + 13y = 1530$$

simplificando

$$9(1020 - 6y) + 12(13y) = 12(1530)$$

quitando parentesis

$$9180 - 54y + 156y = 18360$$

simplificando

$$102y = 9180$$

determinando (y)

$$y = 90$$

Sustituyendo en c

$$c = \frac{1020 - 6y}{12} = \frac{1020 - 6(90)}{12} = 40$$

¿Cuánto se tendría que pagar por 5 bultos de cemento y 3 bultos de yeso?

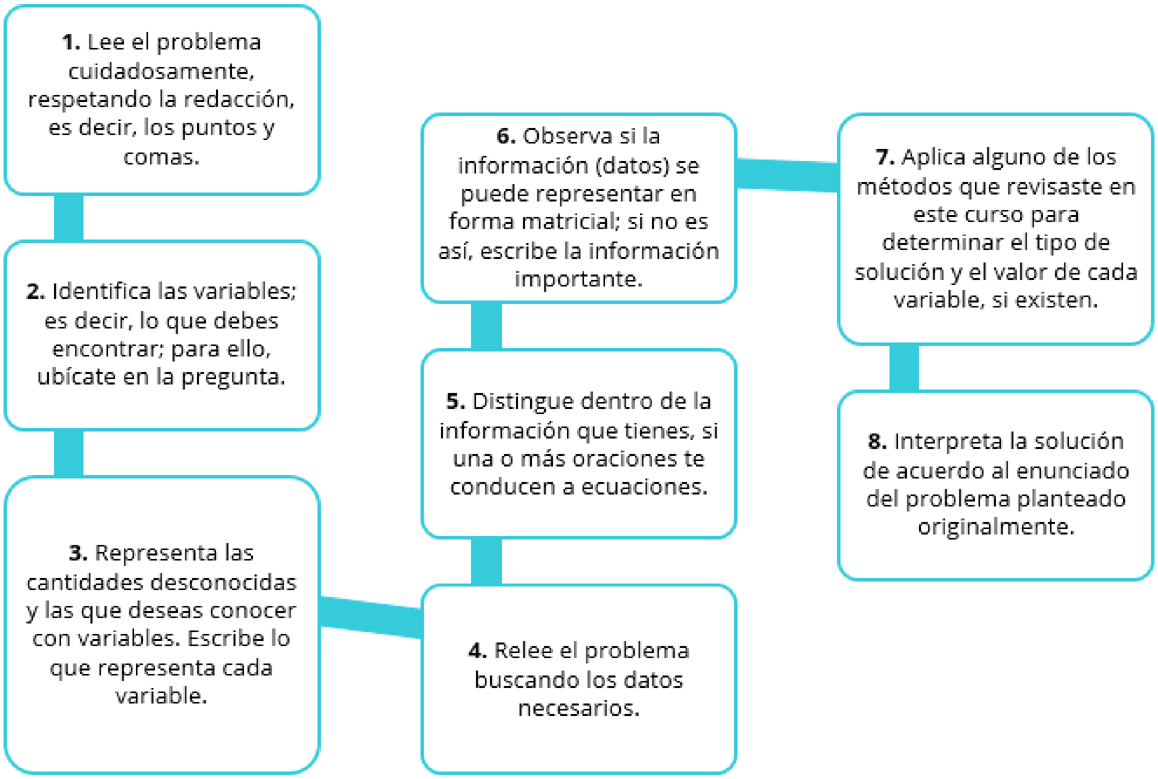
$$5c + 3y = 5(40) + 3(90) = \$470.oo$$

Realiza lo siguiente en la explicación de clase:

- Inicia el tema indicando las aplicaciones del planteo de problemas a través de un sistema de ecuaciones.
- Presenta una metodología de cómo realizar el planteamiento de problemas.
- Te puedes apoyar en la siguiente bibliografía:

Cuellar, J. (2012). Matemáticas 1 (3ª ed.). México: McGraw Hill.

Zill, G. (2012). Álgebra, trigonometría y geometría analítica (3ª ed.). México: McGraw Hill.



- Para conocer más sobre aplicaciones de las ecuaciones lineales, revisa el siguiente video:
  julioprofe. (2014, 17 de abril). Problema 3 con SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 3x3 [Archivo de video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=-Ip03K7hG44

Estimado profesor, espero que estas notas de enseñanza sean se utilidad para ti y que orienten tu trabajo.

Saludos cordiales.