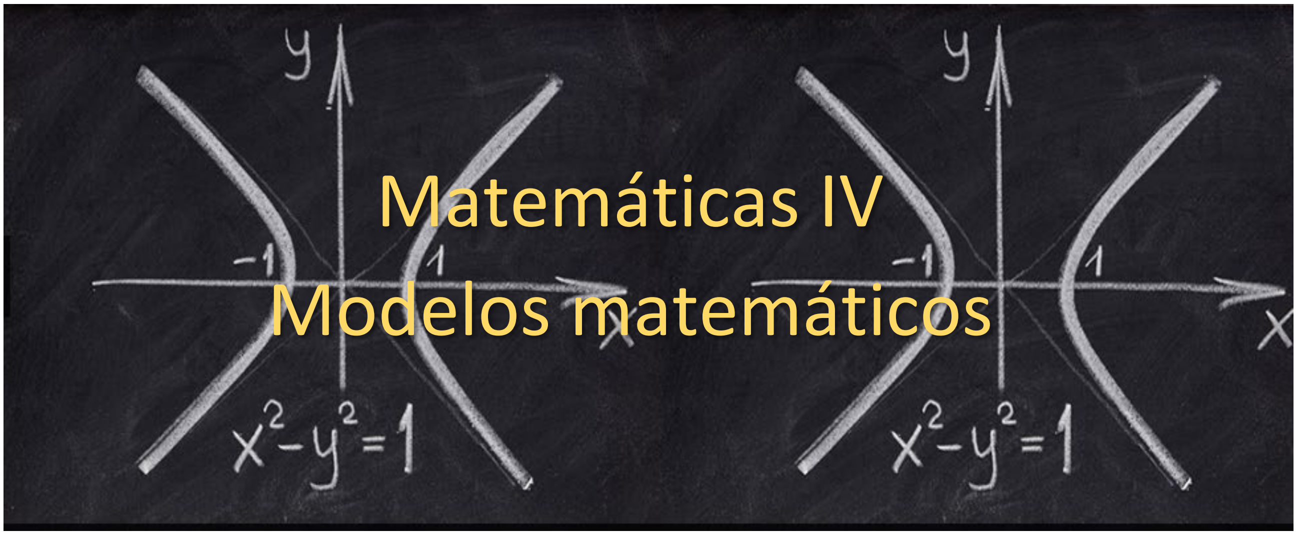


Estimado colega:

El propósito de esta guía es proporcionarte lineamientos prácticos que te ayuden a realizar tu labor docente de manera más organizada y precisa para enriquecer tu clase y cubrir de manera plena el temario. Se exponen guías y consejos de cada tema para que la enseñanza se facilite y te sea sencillo transmitir el conocimiento abstracto que cada tema supone, siempre aclarando los tecnicismos de los procedimientos y aplicaciones que ayuden al estudiante a visualizar la aplicación de estos. Las pantallas que muestran ejemplos se obtuvieron directamente del *software* que se explica en la computadora para fines educativos.

Módulo 1. Coordenadas rectangulares y la recta

En este módulo el alumno aprenderá a reconocer situaciones que tienen una razón de cambio constante, a plantear su ecuación y dibujar su gráfica. Este tipo de situaciones son de gran aplicación en la vida real y en los diferentes campos de especialidad (construcciones arquitectónicas como puentes, casas, etc.).

Tema 1. Sistemas de coordenadas rectangulares

Contenido para el profesor ALEKS

1.1 Graficación de puntos dados en el plano cartesiano y distancia entre puntos

- Marcar un punto en el plano de coordenadas.
- Nombrar el cuadrante o eje de un punto dado su gráfico.
- Nombrar el cuadrante o eje donde se encuentran puntos dadas sus coordenadas.
- Nombrar el cuadrante o el eje de un punto dados los signos de sus coordenadas.

1.2 Coordenadas del punto que divide un segmento lineal en una razón dada

- Distancia entre dos puntos en el plano.
- Punto medio de un segmento de recta en el plano.
- Hallar un punto extremo de un segmento de recta dado el otro punto y el punto medio.

- Hallar la distancia entre puntos que comparten una coordenada: problema tipo 1.
- Hallar la distancia entre puntos que comparten una coordenada: problema tipo 2.

1.3 El área de un triángulo dados sus vértices

- Hallar el perímetro o el área de un rectángulo en el plano de coordenadas.
- Área de cuadriláteros en el plano de coordenadas.

Es importante utilizar algunos ejemplos de ALEKS para la explicación del tema. A continuación, se presentan algunos ejemplos:

Problema | Explicación

Siguiente problema

Nombrar el cuadrante o eje donde se encuentran puntos dadas su coordenadas

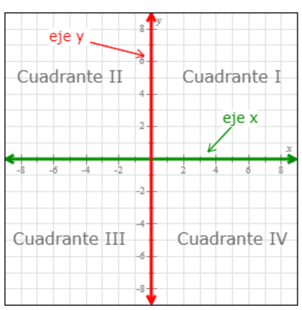
PREGUNTA

Nombrar el cuadrante o eje donde se encuentra cada punto.

(-4, -2):	Seleccionar uno ▾
(-7, 6):	Seleccionar uno ▾
(0, -6):	Seleccionar uno ▾
(5, -3):	Seleccionar uno ▾

EXPLICACIÓN

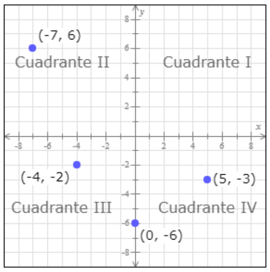
El eje x y el eje y dividen el plano de coordenadas en cuatro cuadrantes.
Estos cuatro cuadrantes se identifican como I, II, III, y IV como se muestra a continuación.



Observemos que los puntos en un eje no se encuentran en ningún cuadrante.

En este problema:

Se nos dan los siguientes puntos.



Vemos lo siguiente.

El punto $(-4, -2)$ se encuentra en el Cuadrante III.
El punto $(-7, 6)$ se encuentra en el Cuadrante II.
El punto $(0, -6)$ se encuentra en el eje y. (Los puntos en un eje no se encuentran en ningún cuadrante.)
El punto $(5, -3)$ se encuentra en el Cuadrante IV.

RESPUESTA

(-4, -2):	Cuadrante III
(-7, 6):	Cuadrante II
(0, -6):	eje y
(5, -3):	Cuadrante IV

- Para conocer más sobre **el plano cartesiano**, revisa el siguiente video: KhanAcademyEspañol. (2013, 7 de enero). *El plano coordenado* [Archivo de video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=b_YsrpisGTQ&list=PLD458BB6B314973D8&index=88
- Para conocer más sobre **la fórmula de distancia**, revisa el siguiente video: KhanAcademyEspañol. (2013, 8 de enero). *Fórmula de Distancia* [Archivo de video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=Yw8y550vF-s&list=PLD458BB6B314973D8&index=96

Tema 2. La recta

Contenido para el profesor ALEKS

2.1 Pendiente de una recta

- Clasificar pendientes dados los gráficos de rectas.
- Hallar la pendiente dado el gráfico sobre una cuadrícula.
- Hallar la pendiente de rectas horizontales y verticales.
- Hallar la pendiente dados dos puntos en la recta.

2.2 Rectas paralelas y perpendiculares a los ejes coordenados y su ecuación

- Identificar rectas paralelas y perpendiculares.
- Identificar rectas paralelas y perpendiculares a partir de sus ecuaciones.
- Escribir las ecuaciones de rectas verticales y horizontales que atraviesan un punto dado.

Continúa con los siguientes pasos para el desarrollo del tema:

- Inicia la clase haciendo una reflexión sobre la importancia de reconocer las diferentes posiciones de la recta.
- Recuerda cuando dos rectas son paralelas o perpendiculares.
- Distingue las diferentes pendientes que puede tener la recta.

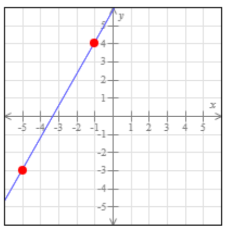
Algunos ejemplos de ALEKS son los siguientes:

Problema | **Explicación** | Siguiente problema >

Hallar la pendiente dado el gráfico sobre una cuadrícula

PREGUNTA

Hallar la pendiente de la recta trazada a continuación.



EXPLICACIÓN

La pendiente de una recta mide su inclinación.
Dados dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en una recta, utilizamos la siguiente fórmula.

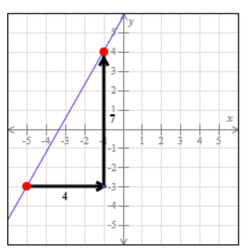
$$\text{pendiente} = \frac{\text{elevación}}{\text{recorrido}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Observemos que la *elevación* es el cambio en la ordenada y *el recorrido* es el cambio en la abscisa.

En este problema, tenemos una recta que atraviesa $(-5, -3)$ y $(-1, 4)$.

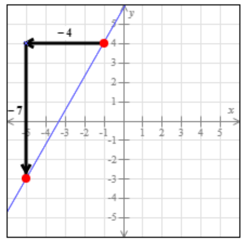
- Podemos hacer $(x_1, y_1) = (-5, -3)$ y $(x_2, y_2) = (-1, 4)$.

$$\text{pendiente} = \frac{4-(-3)}{-1-(-5)} = \frac{7}{4}$$



- Igualmente, podemos hacer $(x_1, y_1) = (-1, 4)$ y $(x_2, y_2) = (-5, -3)$.

$$\text{pendiente} = \frac{-3-4}{-5-(-1)} = \frac{-7}{-4} = \frac{7}{4}$$



De cualquier modo, la pendiente que calculamos es la misma.
Por lo tanto sólo necesitamos utilizar una de las formas anteriores para calcular la pendiente.

RESPUESTA

La pendiente de la recta es $\frac{7}{4}$.

Otro ejemplo es el siguiente:

Problema | Explicación

Siguiente problema >>

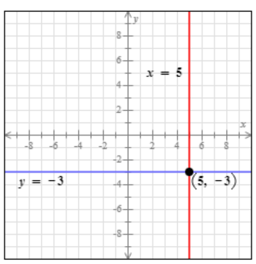
Escribir las ecuaciones de rectas verticales y horizontales que atraviesan un punto dado

PREGUNTA

Escribir ecuaciones para la recta horizontal y la recta vertical que atraviesan el punto $(5, -3)$.

EXPLICACIÓN

El punto $(5, -3)$ se encuentra en la recta horizontal que interseca el eje y en -3.
También se encuentra en la recta vertical que interseca el eje eje x en 5.
Aquí mostramos los gráficos de estas dos rectas con sus ecuaciones.



En el plano de coordenadas, la ecuación $y = -3$ representa todos los puntos cuya ordenada es -3.
La ecuación $x = 5$ representa todos los puntos cuya abscisa es 5.

RESPUESTA

recta horizontal: $y = -3$
recta vertical: $x = 5$

Tema 3. Tipos de la ecuación de la recta

Contenido para el profesor ALEKS

3.1 La ecuación punto-pendiente

- Trazar el gráfico de una recta dada su ecuación en forma punto-pendiente.
- Escribir la ecuación de una recta que atraviesa dos puntos dados.
- Escribir una ecuación en la forma punto-pendiente dadas la pendiente y un punto.

3.2 La ecuación pendiente-ordenada al origen

- Escribir la ecuación de una recta dados un punto y la ordenada al origen.
- Escribir la ecuación de una recta dadas su pendiente y su ordenada al origen.
- Escribir una ecuación en forma pendiente-ordenada al origen dados la pendiente y un punto.
- Hallar la pendiente y la ordenada al origen de una recta dada su ecuación en la forma y = mx + b.

3.3 La ecuación general de la recta

- Escribir una ecuación en forma general dada la pendiente y un punto.
- Hallar la pendiente y la ordenada al origen de una recta dada su ecuación en la forma Ax + By = C.
- Reescribir una ecuación lineal en la forma Ax + By = C.

En ALEKS, se presentan algunos problemas como los siguientes:

Problema | Explicación

Siguiente problema >>

Escribir una ecuación en la forma punto pendiente dadas la pendiente y un punto

PREGUNTA

Una recta atraviesa el punto $(-6, 2)$ y tiene una pendiente igual a $-\frac{4}{3}$.

Escribir una ecuación en la forma punto pendiente para esta recta.

EXPLICACIÓN

Debemos escribir nuestra ecuación en la forma punto pendiente, la cual es la siguiente.

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

En esta forma, (x_1, y_1) es un punto en la recta y m es la pendiente. Más

Nuestra recta atraviesa $(-6, 2)$ y tiene una pendiente de $-\frac{4}{3}$.

Por lo que sustituimos $(-6, 2)$ por (x_1, y_1) y $-\frac{4}{3}$ por m.

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-2=-\frac{4}{3}(x-(-6))$$

$$y-2=-\frac{4}{3}(x+6)$$

RESPUESTA

$$y-2=-\frac{4}{3}(x+6)$$

Problema | Explicación | Otra explicación

Siguiente problema >>

Escribir una ecuación en forma pendiente ordenada al origen dados la pendiente y un punto

PREGUNTA

Una recta atraviesa el punto $(-8, 9)$ y tiene una pendiente igual a $\frac{3}{4}$.

Escribir una ecuación en forma pendiente ordenada al origen para esta recta.

EXPLICACIÓN

Debemos escribir nuestra ecuación en la forma pendiente ordenada al origen, que es la siguiente.

$$y = mx + b$$

En esta forma, m es la pendiente y b es la ordenada al origen

Ya que la pendiente de nuestra recta es $\frac{3}{4}$, sabemos que $m = \frac{3}{4}$.

$$y = \frac{3}{4}x + b$$

Se nos indica que la recta atraviesa el punto $(-8, 9)$.
Por lo tanto, la ecuación debe ser cierta cuando $x = -8$ y $y = 9$.

$$9 = \frac{3}{4}(-8) + b$$

$$9 = -6 + b$$

$$15 = b$$

Ahora escribimos la ecuación de la recta en forma pendiente ordenada al origen.

$$y = \frac{3}{4}x + 15$$

RESPUESTA

$$y = \frac{3}{4}x + 15$$

Sugerencias

En los temas propuestos no se encuentra la ecuación de la recta en forma simétrica. Sin embargo, sí se puede ver el tema para complementar la información.

Video y lectura sugeridos

Para conocer más sobre **la línea recta**, revisa el siguiente video:
guatematico. (2011, 24 de enero). *La Línea Recta: Tipos de Ecuación de Recta* [Archivo de video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=3jCdEGSNolw

Para conocer más sobre **las ecuaciones de la línea recta**, te recomendamos el siguiente artículo:
Fernández, M. (2003). *Ecuaciones de la recta (II).* Recuperado de http://recursostic.educacion.es/descartes/web/.../

Tema 4. Paralelismo y perpendicularidad

Contenido para el profesor ALEKS

4.1 Las condiciones de paralelismo y perpendicularidad de acuerdo con sus pendientes

- Escribir ecuaciones de rectas paralelas y perpendiculares a una recta dada que atraviesa un punto dado.
- Hallar pendientes de rectas paralelas y perpendiculares a una recta dada en forma pendiente ordenada al origen.
- Hallar pendientes de rectas paralelas y perpendiculares a una recta dada en la forma Ax + By = C.

Algunos ejemplos de ALEKS son los siguientes:

Problema | Explicación

Siguiente problema >>

Hallar pendientes de rectas paralelas y perpendiculares a una recta dada en forma pendiente ordenada al origen

PREGUNTA

Consideremos la recta $y = \frac{1}{4}x$.

(a) ¿Cuál es la pendiente de una recta paralela a esta recta?

(b) ¿Cuál es la pendiente de una recta perpendicular a esta recta?

EXPLICACIÓN

Para hallar las pendientes, vamos a utilizar las siguientes propiedades. Más

Propiedad de la pendiente de las paralelas:
Dos rectas no verticales son paralelas si y solo si tienen la misma pendiente.

Propiedad de la pendiente de las perpendiculares:
Dos rectas no verticales son perpendiculares si y solo si el producto de sus pendientes es -1.

Primero comparamos la ecuación dada con la siguiente forma pendiente ordenada al origen.

$$y = mx + b$$

En esta forma la pendiente es m. Esto es lo que tenemos.

$$y = \frac{1}{4}x$$

$$y = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}x$$

$$y = \boldsymbol{m}x$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta dada es $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$.

(a) Utilizamos la propiedad de la pendiente de las paralelas.

Ya que la pendiente de la recta dada es $\frac{1}{4}$, una recta paralela a esta debe tener también una pendiente igual a $\frac{1}{4}$.

(b) Utilizamos la propiedad de la pendiente de las perpendiculares.

Ya que la pendiente de la recta dada es $\frac{1}{4}$, una recta perpendicular a esta debe tener una pendiente igual a -4.

$$\frac{1}{4} \cdot (-4) = -1$$

Más

RESPUESTA

(a) Pendiente de una recta paralela: $\frac{1}{4}$

(b) Pendiente de una recta perpendicular: -4

Problema | Explicación

Siguiente problema >>

Escribir ecuaciones de rectas paralelas y perpendiculares a una recta dada que atraviesa un punto dado

PREGUNTA

Consideremos la recta $y = \frac{5}{4}x + 3$.

(a) Hallar la ecuación de la recta que es perpendicular a esta recta y atraviesa el punto $(-4, \ -6)$.

(b) Hallar la ecuación de la recta que es paralela a esta recta y atraviesa el punto $(-4, \ -6)$.

EXPLICACIÓN

Vamos a utilizar la siguientes propiedades.

Propiedad de la pendiente de las paralelas:
Dos rectas no verticales son paralelas si y solo si tienen la misma pendiente.

Propiedad de la pendiente de las perpendiculares:
Dos rectas no verticales son perpendiculares si y solo si el producto de sus pendientes es -1.

La ecuación $y = \frac{5}{4}x + 3$ está escrita en la forma pendiente ordenada al origen $y = mx + b$.

En esta forma la pendiente es m, que es $\frac{5}{4}$.

(a) Utilizamos la propiedad de la pendiente de las perpendiculares.

Ya que la recta dada tiene una pendiente igual a $\frac{5}{4}$, una recta con pendiente igual a $-\frac{4}{5}$ es perpendicular a ella. ¿Por qué?

Por lo tanto, la ecuación de la recta perpendicular va a tener la forma $y=-\frac{4}{5}x+b$.

La recta atraviesa $(-4,\ -6)$, por lo que utilizamos $x=-4$ y $y=-6$ para resolver para b.

$$\begin{aligned} y &= -\frac{4}{5}x+b \\ -6 &= -\frac{4}{5}(-4)+b \\ -6 &= \frac{16}{5}+b \\ -\frac{30}{5} &= \frac{16}{5}+b \\ b &= -\frac{46}{5} \end{aligned}$$

De manera que la ecuación de la recta perpendicular es $y=-\frac{4}{5}x-\frac{46}{5}$. Utilizar punto-pendiente

(b) Utilizamos la propiedad de la pendiente de las paralelas.

Ya que la recta dada tiene una pendiente igual a $\frac{5}{4}$, una recta paralela a ella debe también tener una pendiente igual a $\frac{5}{4}$.

Por lo tanto, la ecuación de la recta paralela va a tener la forma $y=\frac{5}{4}x+b$.

La recta atraviesa $(-4,\ -6)$, por lo que utilizamos $x=-4$ y $y=-6$ para resolver para b.

$$\begin{aligned} y &= \frac{5}{4}x+b \\ -6 &= \frac{5}{4}(-4)+b \\ -6 &= -5+b \\ b &= -1 \end{aligned}$$

De manera que la ecuación de la recta paralela es $y=\frac{5}{4}x-1$. Utilizar punto-pendiente

RESPUESTA

Ecuación de recta perpendicular: $y=-\frac{4}{5}x-\frac{46}{5}$

Ecuación de recta paralela: $y=\frac{5}{4}x-1$

Sugerencia para complementar el tema

Utiliza la plataforma tecnológica para explicar en clase el tema de longitud del segmento trazado del punto p (x1, y1) y perpendicular a la recta Ax + By + C = 0.

- Inicia el tema haciendo una reflexión sobre cuál es la condición que deben cumplir unas rectas para decir que son paralelas y cuál para que sean perpendiculares.
- Asegúrate que el alumno conozca el procedimiento para obtener la longitud de un segmento que une un punto cualquiera fuera de la recta y la perpendicular a la recta dada.

Tema 5. Más información de las rectas

Este tema se trabajará con la plataforma tecnológica solamente.

Contenido de la plataforma tecnológica

5.1 El ángulo entre rectas
5.2 La ecuación de la familia de las rectas
5.3 La forma polar de la ecuación de la recta

Realiza lo siguiente en la explicación de clase:

- Inicia el tema indicando la importancia de conocer todo sobre las ecuaciones lineales.
- Recomienda hacer uso de los diferentes modelos en los cuales el alumno observe la relación entre las diferentes formas de expresar una ecuación lineal.

Este tema se trabajará exclusivamente con la plataforma tecnológica de Tecmilenio y **no se usará ALEKS**, por lo que la evaluación de este tema se hará con el ejercicio propuesto de la plataforma.

Instrucciones

Con tu número de nómina, ingresa a la plataforma tecnológica y busca el curso que se está impartiendo en el periodo escolar. En el apartado de **Lecturas de apoyo**, aparecerán todas las explicaciones de los temas a tratar en este curso. En la parte de Módulo 1, Tema 5, está activado el ejercicio que el alumno deberá realizar (con el que se evaluará el tema).

Módulo 2. Cónicas

En este módulo aprenderás las secciones cónicas. Aunque estas curvas surgieron en la antigüedad, son de gran aplicación en la actualidad en diferentes disciplinas y oficios, como arquitectura, ingenierías, artesanías, pinturas, entre otras. Se le llama sección cónica a la curva que se forma cortando un cono con un plano. Estas curvas son la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola. Las cónicas pueden ser representadas por una ecuación matemática de segundo grado. Las ecuaciones que relacionan las variables *x* y *y* para representar las secciones cónicas fueron descubiertas por el matemático y filósofo René Descartes.

Tema 6. Circunferencia

Contenido para el profesor ALEKS

6.1 La forma general de la ecuación de la circunferencia

- Trazar un círculo dada su ecuación en forma general.
- Escribir la ecuación de un círculo dado su centro y un punto en el círculo.
- Trazar un círculo dada su ecuación en forma general: básico.
- Trazar un círculo dada su ecuación en forma general: avanzado.
- Escribir la ecuación de un círculo dados los extremos de un diámetro.

Algunos ejemplos de ALEKS son los siguientes:

Problema | Explicación | **Otra explicación**

Siguiente problema >>

Escribir la ecuación de un círculo dado su centro y un punto en el círculo

PREGUNTA

Hallar la ecuación del círculo con centro $(1, -6)$ y pasa a través de $(-1, 1)$.

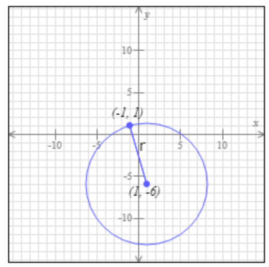
OTRA EXPLICACIÓN

Aquí está la forma general de una ecuación del círculo con centro (h, k) y radio r.

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Dado que el centro del círculo es $(h, k)=(1, -6)$, la ecuación puede escribirse de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}(x-h)^2+(y-k)^2 &= r^2\\(x-1)^2+(y-(-6))^2 &= r^2\\(x-1)^2+(y+6)^2 &= r^2\end{aligned}$$



El círculo pasa por el punto $(x, y)=(-1, 1)$.

Por consiguiente, podemos utilizar estas coordenadas en la ecuación para hallar r^2.

$$\begin{aligned}(x-1)^2+(y+6)^2 &= r^2\\(-1-1)^2+(1+6)^2 &= r^2\\(-2)^2+7^2 &= r^2\\53 &= r^2\end{aligned}$$

RESPUESTA

$$(x-1)^2+(y+6)^2=53$$

Problema | **Explicación** | Otra explicación

Siguiente problema >>

Escribir la ecuación de un círculo dados los extremos de un diámetro

PREGUNTA

Hallar la ecuación del círculo cuyo diámetro tiene extremos $(-4, -3)$ y $(2, -5)$.

EXPLICACIÓN

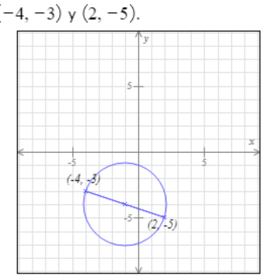
Esta es la forma general de la ecuación de un círculo con centro (h, k) y radio r.

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Debemos hallar el centro y el radio de nuestro círculo.

El centro (h, k) es el punto medio del diámetro, que tiene los extremos $(-4, -3)$ y $(2, -5)$.
Así, podemos hallar el centro utilizando la fórmula del punto medio.

$$\begin{aligned}(h, k) &= \left(\frac{-4+2}{2}, \frac{-3+(-5)}{2}\right)\\ &= \left(\frac{-2}{2}, \frac{-8}{2}\right)\\ &= (-1, -4)\end{aligned}$$



El radio r es la distancia desde el centro hacia un extremo del diámetro.

Por lo tanto, vamos a hallar la distancia desde el centro $(-1, -4)$ hasta el extremo $(-4, -3)$. Otra manera

Utilizamos la fórmula de la distancia de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(-4-(-1))^2+(-3-(-4))^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2+1^2} \\ &= \sqrt{9+1} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

Dado que el círculo tiene centro $(h, k) = (-1, -4)$ y radio $r = \sqrt{10}$, escribimos la ecuación de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} (x-h)^2+(y-k)^2 &= r^2 \\ (x-(-1))^2+(y-(-4))^2 &= (\sqrt{10})^2 \\ (x+1)^2+(y+4)^2 &= 10 \end{aligned}$$

RESPUESTA

$(x+1)^2+(y+4)^2=10$

Realiza lo siguiente en la explicación de clase:

- Inicia el tema presentando el concepto de la circunferencia e indica que es una de las ecuaciones más importantes de la geometría. Aunque su aparición data desde el invento de la rueda, su uso hoy en día es de gran utilidad en la vida cotidiana y en diferentes disciplinas.
- Fomenta la lluvia de ideas de los alumnos para identificar circunferencias en su vida cotidiana.

Se sugiere ver los siguientes videos:

Para conocer más sobre **la circunferencia**, revisa el siguiente video:
Educatina. (2012, 2 de octubre). *Circunferencia - Álgebra - Educatina* [Archivo de video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=ybTXj-8fxQY

Para conocer más sobre **el radio y centro de la circunferencia**, revisa el siguiente video:
KhanAcademyEspañol. (2013, 24 de noviembre). *Radio y centro a partir de ecuación estándar de un círculo* [Archivo de video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=hsW4oNWzKXc

Tema 7. Elipse

Contenido para el profesor ALEKS

7.1 La forma estándar de la ecuación de la elipse

- Trazar una elipse con centro en el origen $Ax^2 + By^2 = C$.
- Hallar los focos de una elipse.
- Escribir la ecuación de una elipse dado el centro, el extremo de un eje y la longitud de otro eje.
- Escribir la ecuación de una elipse dado el foco y la longitud de los ejes mayores.

7.2 La forma general de la ecuación de la elipse

- Trazar una elipse dada su ecuación en forma general.
- Trazar una elipse dada la forma general de su ecuación.

Realiza lo siguiente en la explicación de clase:

- Comienza explicando cómo es una elipse y cuáles son sus elementos.
- Realiza lluvia de ideas de las diferencias que existen entre una circunferencia y una elipse.
- Recomiéndale a los alumnos que repasen procedimientos de cómo resolver un binomio al cuadrado y la factorización del trinomio cuadrado perfecto.

Un ejemplo de ALEKS es el siguiente:

Problema | Explicación

Siguiente problema >>

Escribir la ecuación de un elipse dado el foco y la longitud de los ejes mayores

PREGUNTA

Hallar la ecuación de un elipse que tiene un eje mayor de longitud 12 y focos en $(-5, -2)$ y $(-5, -6)$.

EXPLICACIÓN

Puesto que los focos tienen la misma abscisa, el eje mayor es vertical. La forma general de un elipse con eje mayor vertical es

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1,$$

donde (h, k) son las coordenadas del centro C, $2a$ es la longitud del eje mayor, y $2b$ es la longitud del eje menor.

Puesto que el centro C es el punto medio del segmento de recta que conecta a los focos, tenemos $(h, k) = \left(-5, \frac{-2+(-6)}{2}\right) = (-5, -4)$.

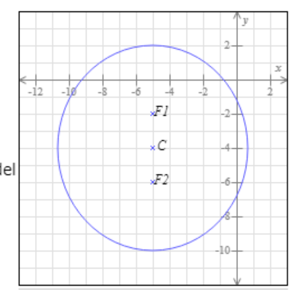


Figura 1

Puesto que $2a = 12$, tenemos $a = 6$.

Para hallar b, utilizamos el hecho de que $a^2 - b^2 = c^2$, donde c es la longitud focal del elipse, es decir, $2c$ es la distancia entre los dos focos: $2c = -2-(-6) = 4$, y por lo tanto $c = 2$.

Por lo tanto,

$$b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 4 = 32.$$

Por consiguiente, la ecuación del elipse en forma general es

RESPUESTA

$$\frac{(x+5)^2}{32} + \frac{(y+4)^2}{36} = 1.$$

Tema 8. Parábola

Contenido para el profesor ALEKS

8.1 Ecuaciones de la parábola

- Escribir la ecuación de una parábola dados el vértice y el foco.
- Hallar el foco de una parábola.
- Trazar una parábola con un eje horizontal o vertical.

Se recomienda completar la explicación con la plataforma tecnológica.

Realiza lo siguiente en la explicación de clase:

- Inicia el tema presentando los conceptos de parábola.
- Practiquen en ALEKS.
- Explica los elementos de la parábola para que identifiquen la directriz.
- Utiliza las diferentes fórmulas de la ecuación de la parábola.

Algunos ejercicios de ALEKS se presentan de la siguiente manera:

Problema | Explicación

Siguiente problema >

Escribir la ecuación de una parábola dados el vértice y el foco

PREGUNTA

Hallar la ecuación de la parábola con vértice $(-4, -3)$ y foco $(5, -3)$.

EXPLICACIÓN

Información preliminar:

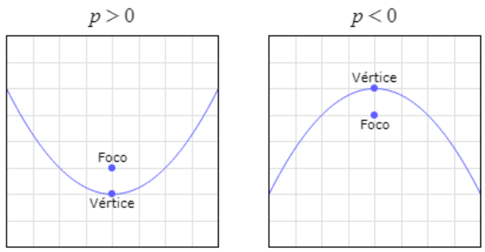
Una parábola es el conjunto de todos los puntos en un plano que están a la misma distancia de una recta fija que de un punto fijo que no está en la recta.

La recta fija es la directriz y el punto fijo es el foco. Más

Suponiendo que conocemos el vértice (h, k) y el foco.
Luego podemos determinar la orientación y ecuación de la parábola de la siguiente manera.

- La parábola tiene un eje de simetría *vertical* si el foco está directamente arriba o abajo del vértice.
  Su ecuación es $(x-h)^2 = 4p(y-k)$, donde $|p|$ es la distancia desde el vértice hasta el foco.
  Si el foco está arriba del vértice, entonces p es positivo y la parábola se abre hacia arriba.
  Si el foco está abajo del vértice, entonces p es negativo y la parábola se abre hacia abajo.
  De cualquier manera, podemos calcular p de la siguiente manera.

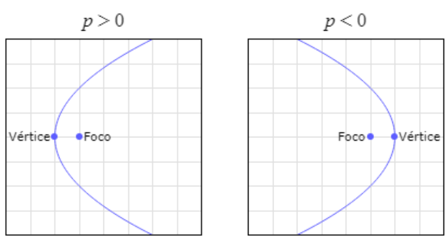
  $p =$ *(la ordenada del foco)* $-$ *(la ordenada del vértice)*



- La parábola tiene un eje de simetría *horizontal* si el foco está directamente a la derecha o la izquierda del vértice.
  Su ecuación es $(y-k)^2 = 4p(x-h)$, donde $|p|$ es la distancia desde el vértice hasta el foco.
  Si el foco está a la derecha del vértice, entonces p es positivo y la parábola se abre hacia la derecha.
  Si el foco está a la izquierda del vértice, entonces p es negativo y la parábola se abre hacia la izquierda.
  De cualquier manera, podemos calcular p de la siguiente manera.

  $p =$ *(la abscisa del foco)* $-$ *(la abscisa del vértice)*

$p =$ *(la abscisa del foco)* $-$ *(la abscisa del vértice)*



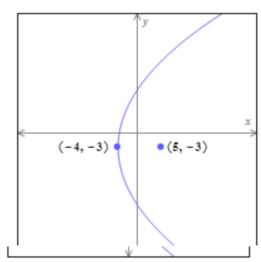
Más

El problema actual:

El foco $(5, -3)$ está directamente a la derecha de del vértice $(-4, -3)$.

Por lo tanto, la párabola se abre a la derecha, como se muestra a continuación.
Su ecuación tiene la siguiente forma.

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$



La distancia desde el vértice hasta el foco es 9.
Dado que la párablola se abre a la derecha, p es positivo, por lo que $p = 9$.

También podemos calcular p directamente de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} p &= \text{(la abscisa del foco)} - \text{(la abscisa del vértice)} \\ &= 5-(-4) \\ &= 9 \end{aligned}$$

Luego, utilizando el vértice $(h, k) = (-4, -3)$ y $p = 9$, obtenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned} (y-k)^2 &= 4p(x-h) \\ (y-(-3))^2 &= 4 \cdot 9(x-(-4)) \\ (y+3)^2 &= 36(x+4) \end{aligned}$$

RESPUESTA

La respuesta es $(y+3)^2 = 36(x+4)$.

Tema 9. Hipérbola

Contenido para el profesor ALEKS

9.1 Ecuaciones de la hipérbola

- Trazar el gráfico de una hipérbola dada la forma general de su ecuación.
- Trazar una hipérbola con centro en el origen $Ax^2 + By^2 - C = 0$.
- Trazar el gráfico de una hipérbola dada la forma general de su ecuación.
- Hallar los focos de una hipérbola.
- Escribir la ecuación de una hipérbola dados los focos y los vértices.
- Escribir la ecuación de una hipérbola cuando los focos y las asíntotas son dadas.

Un ejemplo de ALEKS es el siguiente:

Problema | Explicación

Siguiente problema >

Hallar los focos de una hipérbola

PREGUNTA

Hallar los focos de la hipérbola.

$$9x^2 - 25y^2 + 36x - 189 = 0$$

EXPLICACIÓN

Para cada punto en una hipérbola, la diferencia de las distancias hasta dos puntos fijos, llamados los focos, es constante.

Más

Para hallar los focos, vamos a completar el cuadrado en x y a escribir la ecuación en forma general.

$$9x^2 - 25y^2 + 36x - 189 = 0$$

$$\left(9x^2 + 36x\right) - 25y^2 = 189$$

$$9\left(x^2 + 4x\right) - 25y^2 = 189$$

$$9\left(x^2 + 4x + \_\right) - 25y^2 = 189$$

$$9\left(x^2 + 4x + 4\right) - 25y^2 = 189 + 9(4) \quad \text{Sumamos } 9(4) = 36 \text{ a ambos lados}$$

$$9(x+2)^2 - 25y^2 = 225$$

$$\frac{(x+2)^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$$ Dividimos ambos lados entre 225 para obtener un 1 en el lado derecho

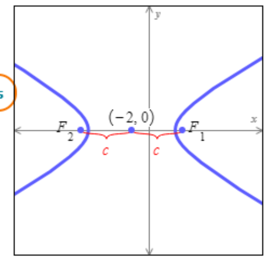
Dado que el término y se resta del término x, esta hipérbola tiene un eje transversal *horizontal*.
Por lo que vamos a comparar nuestra ecuación a la forma general de una hipérbola con un eje transversal horizontal.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Nuestro centro (h, k) es $(-2, 0)$, y tenemos $a^2=25$ y $b^2=9$.

Los focos están situados en la misma recta que el eje transversal a una distancia c del centro.

Nuestro eje transversal es horizontal, tal como se muestra.
Por lo que los focos, F_1 y F_2, están situados hacia la derecha y la izquierda del centro. Más



La distancia c de los focos al centro se encuentra de la siguiente manera.

$$c^2=a^2+b^2$$

Por lo que tenemos lo siguiente.

$$c^2 = 25+9 = 34$$
$$c = \sqrt{34}$$ Debido a que c es una distancia, solo utilizamos la solución positiva

Por lo tanto, los focos están a una distancia de $\sqrt{34}$ hacia la derecha y la izquierda del centro, $(-2, 0)$.

El foco a la derecha del centro: $(-2+\sqrt{34}, 0)$
El foco a la izquierda del centro: $(-2-\sqrt{34}, 0)$

Podemos escribir cualquiera de los dos focos primero, por lo que esta es una posible respuesta.

RESPUESTA

$(-2+\sqrt{34}, 0)$ y $(-2-\sqrt{34}, 0)$

Tema 10. Ecuación general de segundo grado

Contenido para el profesor ALEKS

10.1 Las cónicas a través de la ecuación general de segundo grado

- Clasificar secciones cónicas a partir de sus ecuaciones.

Un ejemplo de ALEKS es el siguiente:

Problema Explicación

Siguiente problema ›

Clasificar secciones cónicas a partir de sus ecuaciones

PREGUNTA

Las ecuaciones de dos cónicas se dan a continuación. Elegir la clasificación correcta para cada una, y después proporcionar la información solicitada.

(a) $x^2 + 16y^2 + 4x - 96y + 132 = 0$	(Elegir uno) ▾
(b) $2x^2 + 2y^2 - 12x - 12y - 14 = 0$	(Elegir uno) ▾

EXPLICACIÓN

Materia Preliminar:

Consideremos la ecuación de la forma

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

Si cualquiera de A o C (o ambos) es diferente de cero, entonces la ecuación describe una sección cónica--un círculo, una elipse, una hipérbola, o una parábola. Para saber cual sección cónica describe una ecuación dada, podemos manipular la ecuación hasta que se halle en una de las formas generales a continuación (véase la siguiente tabla):

Sección cónica	Forma general	Significado de las constantes
Círculo	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$	(h, k) - centro r - radio
Elipse	Eje mayor horizontal: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ Eje mayor vertical: $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$	(h, k) - centro $2a$ - longitud del eje mayor $2b$ - longitud del eje menor $(0<b<a)$
Hipérbola	Eje transverso horizontal: $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ Eje transverso vertical: $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$	(h, k) - centro a - distancia del centro a cualquier vértice $b^2=c^2-a^2$, donde c es la distancia del centro a cualquier foco $(b>0)$
Parábola	Eje vertical: $y=a(x-h)^2+k$ Eje horizontal: $x=a(y-k)^2+h$	(h, k) - vértice a - factor de amortiguación

Observemos lo siguiente acerca de estas ecuaciones:

- La ecuaciones del círculo, la elipse, y la hipérbola todas tienen un término x^2 y un término y^2.
- La parábola es la única cónica cuya ecuación contiene solamente un término al cuadrado. Esto es, tiene o un término x^2 o un término y^2 pero no ambos.

- Los coeficientes del término x^2 y del término y^2 tienen el mismo signo (ambos son positivos) en las ecuaciones del círculo y de la elipse.
- Los coeficientes del término x^2 y del término y^2 tienen signos diferentes en la ecuación de la hipérbola.

En este problema:

(a) Ya que la ecuación $\left(x^2+16y^2+4x-96y+132=0\right)$ tiene ambos un término x^2 y un término y^2, sabemos que no es la ecuación de una parábola. Además, ya que el coeficiente del término x^2 y el coeficiente del término y^2 tienen el mismo signo (esto es, tenemos x^2+16y^2 en el lado izquierdo de la ecuación), esta ecuación describe un círculo o una elipse. Para saber cual completamos el cuadrado en ambas variables y comparamos el resultado con las formas generales en la tabla.

Proseguimos a completar el cuadrado en ambas variables:

$$
\begin{aligned}
&x^2+16y^2+4x-96y+132=0\\
&x^2+16y^2+4x-96y=-132\\
&x^2+4x+16\left(y^2-6y\right)=-132\\
&x^2+4x+4-4+16\left(y^2-6y+9-9\right)=-132\\
&x^2+4x+4-4+16\left(y^2-6y+9\right)-144=-132\\
&(x+2)^2+16(y-3)^2=16\\
&\frac{(x+2)^2}{16}+(y-3)^2=1.
\end{aligned}
$$

Observando la tabla anterior, podemos ver que esta ecuación describe una elipse que tiene un eje mayor horizontal, con $(h, k)=(-2, 3)$, $a=4$ y $b=1$. (El gráfico de esta elipse se muestra en la Figura 1.)

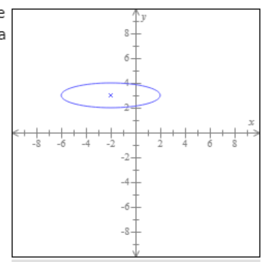


Figura 1

(b) Ya que la ecuación $\left(2x^2+2y^2-12x-12y-14=0\right)$ tiene ambos un término x^2 y un término y^2, sabemos que no es la ecuación de una parábola. Además, ya que el coeficiente del término x^2 y el coeficiente del término y^2 tienen el mismo signo (esto es, tenemos $2x^2+2y^2$ en el lado izquierdo de la ecuación), esta ecuación describe un círculo o una elipse. Para saber cual completamos el cuadrado en ambas variables y comparamos el resultado con las formas generales en la tabla.

Proseguimos a completar el cuadrado en ambas variables:

$$
\begin{aligned}
&2x^2+2y^2-12x-12y-14=0\\
&2x^2+2y^2-12x-12y=14\\
&2\left(x^2-6x\right)+2\left(y^2-6y\right)=14\\
&2\left(x^2-6x+9-9\right)+2\left(y^2-6y+9-9\right)=14\\
&2\left(x^2-6x+9\right)-18+2\left(y^2-6y+9\right)-18=14\\
&2(x-3)^2+2(y-3)^2=50\\
&(x-3)^2+(y-3)^2=25.
\end{aligned}
$$

Observando la tabla anterior, podemos ver que esta ecuación describe un círculo, con centro $(h, k)=(3, 3)$ y $r=5$. (El gráfico de este círculo se muestra en la Figura 2.)

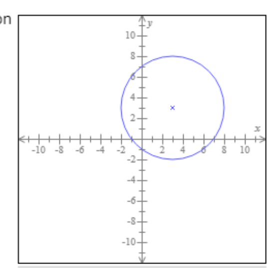


Figura 2

Por lo tanto, la respuesta es:

Circunferencia

Realiza lo siguiente en la explicación de clase:

- Haz una reflexión sobre la importancia de los modelos matemáticos estudiados en este módulo.
- Muestra y explica la siguiente tabla que se encuentra en la plataforma tecnológica:

Para la ecuación:	Valor de A y B	La ecuación representa:
$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$	si $A=B$	Una circunferencia, un punto o el conjunto vacío.
$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$	Si $A \neq B$ y $AB>0$, es decir, A y B son números diferentes pero de igual signo.	Una elipse, un punto o el conjunto vacío.
$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$	Si $A \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$ y $B=0$, es decir, no hay término con "y" cuadrada.	Una parábola vertical.
$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$	Si $A=0, B \neq 0, C \neq 0$ y $D \neq 0$, es decir, no hay término con "x" cuadrada.	Una parábola horizontal.
$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$	Si $AB<0$, es decir, A B son de signo diferente.	Una hipérbola o un par de rectas que se cortan.

Módulo 3. Análisis de curvas algebraicas

El análisis de curvas algebraicas implica conocer valores que se excluyen de la situación, saber si existen valores de intersección, conocer los comportamientos gráficos de simetría y asíntotas, entre otros; de ahí la importancia de aprender sobre estos temas.

Tema 11. Intersección

Contenido para el profesor ALEKS

11.1 La intersección de una curva con los ejes coordenados

- Hallar las intersecciones con el eje *x* y con el eje *y* del gráfico de una ecuación no lineal.
- Hallar las intersecciones en *x* y *y* de una recta dada su ecuación: básico.
- Trazar el gráfico de una recta hallando primero sus intersecciones con el eje *x* y con el eje *y*.
- Hallar las intersecciones con el eje *x* y con el eje *y* de una recta dada la ecuación: avanzado.

Un ejemplo de ALEKS es el siguiente:

Problema | Explicación

Siguiente problema >

Hallar las intersecciones con el eje x y con el eje y de una recta dada la ecuación: Avanzado

PREGUNTA

Hallar la intersección con el eje y y la intersección con el eje x de la recta.

$$3x+2y=-4$$

EXPLICACIÓN

Para hallar la intersección con el eje y, fijamos $x=0$ y resolvemos para y.

$$\begin{aligned} 3x+2y &= -4 \\ 3(0)+2y &= -4 \\ 2y &= -4 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

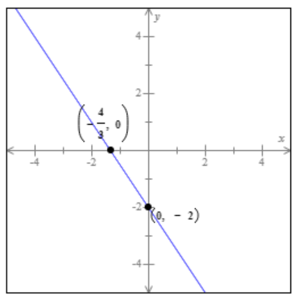
De manera que la intersección con el eje y es -2. Esto significa que el punto $(0,-2)$ se encuentra en la recta.

Para hallar la intersección con el eje x, fijamos $y=0$ y resolvemos para x.

$$\begin{aligned} 3x+2y &= -4 \\ 3x+2(0) &= -4 \\ 3x &= -4 \\ x &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

De manera que la intersección con el eje x es $-\frac{4}{3}$.

Esto significa que el punto $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$ se encuentra en la recta.



RESPUESTA

intersección con el eje y: -2

intersección con el eje x: $-\frac{4}{3}$

Tema 12. Simetría

Contenido para el profesor ALEKS

12.1 La simetría de una curva con respecto a los ejes coordenados y al origen

- Examinar la simetría respecto a los ejes y al origen de una ecuación.

Realiza lo siguiente en la explicación de clase:

- Inicia la clase con el concepto de simetría.
- Apóyate con la explicación y ejemplos que vienen en la plataforma tecnológica.

Se sugieren los siguientes videos:

- Para conocer más sobre **la intersección con los ejes *x* y *y*,** revisa el siguiente video: Matematicatuya. (2011, 20 de septiembre). *INTERSECCIONES DE UNA GRÁFICA CON LOS EJES* [Archivo de video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=sC9m6g2wM2w
- Para conocer más sobre **la simetría en los ejes *x* y *y* de las gráficas,** revisa el siguiente video:
INGEenSHORTS. (2010, 12 de mayo). *Simetría en los ejes x y de las gráficas precálculo 01.073* [Archivo de video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=XJMclUGHI2U

Tema 13. Asíntotas

Este tema se trabajará con la plataforma tecnológica solamente.

Contenido de la plataforma tecnológica

11.1 Asíntotas en una curva

Se recomienda seguir la explicación del tema que proporciona la plataforma. Esta cuenta con ejemplos resueltos que se pueden presentar a los alumnos.

Para la evaluación de este tema, el alumno realizará los ejercicios que se presentan en la plataforma.

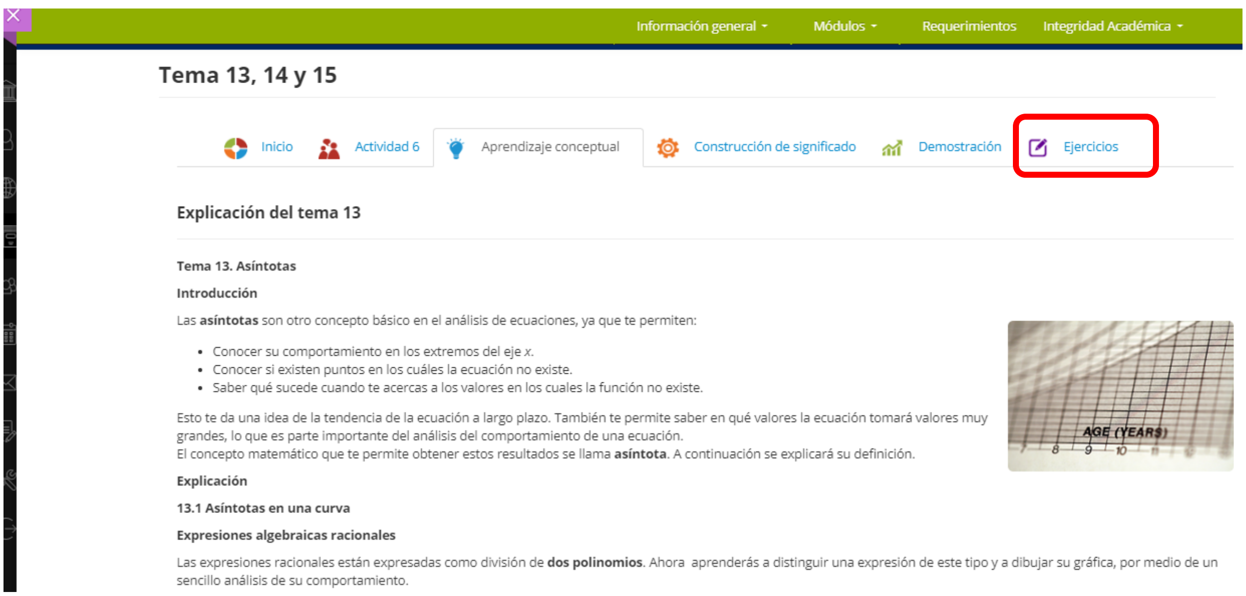
Realiza lo siguiente en la explicación de clase:

- Comienza explicando el significado de la palabra asíntota.
- Presenta los diferentes tipos de asíntotas.
- Realiza algunos ejercicios en el pizarrón para que el alumno comprenda cómo resolver las diferentes asíntotas.

Este tema se trabajará exclusivamente con la plataforma tecnológica de Tecmilenio y **no se usará ALEKS**, por lo que la evaluación de este tema se hará con el ejercicio propuesto de la plataforma.

Instrucciones

Con tu número de nómina, ingresa a la plataforma tecnológica y busca el curso que se está impartiendo en el periodo escolar. En el apartado de **Lecturas de apoyo**, aparecerán todas las explicaciones de los temas a tratar en este curso. En la parte de Módulo 3, Tema 13, está activado el ejercicio que el alumno deberá realizar (con el que se evaluará el tema).



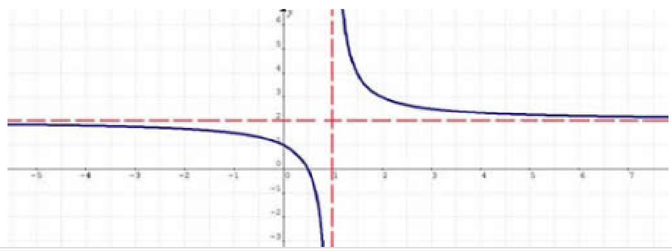
Un ejemplo de la plataforma tecnológica es el siguiente:

Ejemplo 1

Obtén las asíntotas verticales de la expresión racional: $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

Solución

1. Primero igualas a cero el denominador, con lo que obtienes la ecuación $x-1=0$. Para resolverla hay que despejar el valor de *x*, es decir, *x* = 1.
2. Después graficarás para ver el comportamiento de la expresión en valores cerca de la asíntota.



3. Observa que la función se corta en *x* = 1 y que la gráfica se va al infinito (positivo o negativo) en los valores que se encuentran antes y después de ese número, por lo tanto la expresión algebraica tiene una asíntota vertical en *x* = 1.

Tema 14. Transformación de coordenadas

Este tema se trabajará con la plataforma tecnológica solamente.

Contenido de la plataforma tecnológica

14.1 Traslación de ejes

Se recomienda seguir la explicación del tema que proporciona la plataforma. Esta cuenta con ejemplos resueltos que se pueden presentar a los alumnos.

Para la evaluación de este tema, el alumno realizará los ejercicios que se presentan en la plataforma.

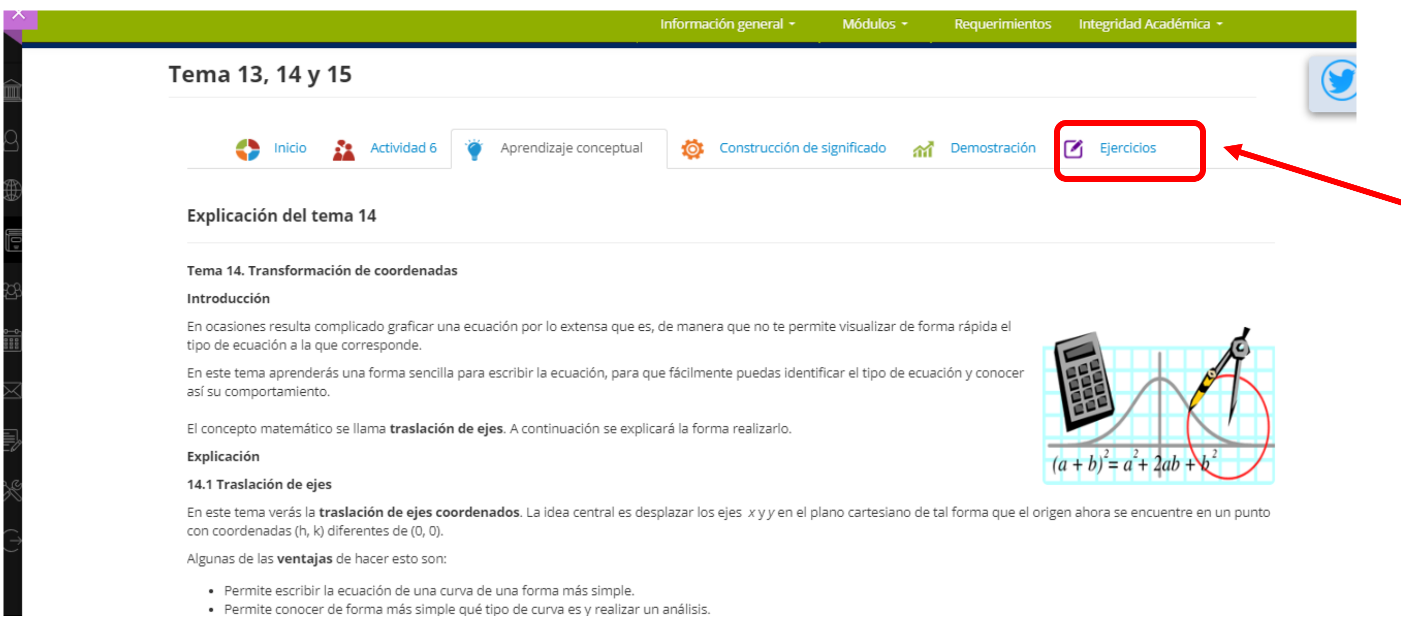
Realiza lo siguiente en la explicación de clase:

- Explica la traslación de ejes (después se explicará la forma para realizarlo).
- Haz los ejemplos propuestos en la plataforma.

Este tema se trabajará exclusivamente con la plataforma tecnológica de Tecmilenio y **no se usará ALEKS**, por lo que la evaluación de este tema se hará con el ejercicio propuesto de la plataforma.

Instrucciones

Con tu número de nómina, ingresa a la plataforma tecnológica y busca el curso que se está impartiendo en el periodo escolar. En el apartado de **Lecturas de apoyo**, aparecerán todas las explicaciones de los temas a tratar en este curso. En la parte de Módulo 3, Tema 14, está activado el ejercicio que el alumno deberá realizar (con el que se evaluará el tema).



Se presenta un ejemplo de la plataforma tecnológica a continuación:

Ejemplo 1

Trasladar la ecuación $y = 4x - 6$ al nuevo plano con centro en (2, 2).

Solución

Utilizando las ecuaciones $x = x' + h,\ \ y = y' + k$, tienes que:

- $x = x' + 2,\ \ y = y' + 2$. Al sustituir en la ecuación obtendrás la nueva ecuación para el plano con centro en (2, 2).

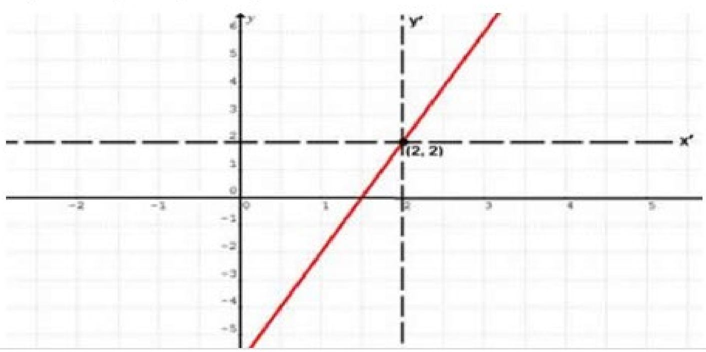
- $y = 4x - 6$ Será equivalente a $y' + 2 = 4(x' + 2) - 6$, simplificando $y' + 2 = 4x' + 8 - 6$.
- Entonces $y' = 4x' + 8 - 6 - 2$ y $y' = 4x'$.

Observa que esta nueva ecuación es más sencilla que la ecuación original. Las ecuaciones son equivalentes y la gráfica es la misma en ambos casos:

Caso 1
Plano cartesiano con C (0, 0). La ecuación $y = 4x - 6$ corresponde a una línea recta que corta al eje *y* en – 6 y tiene pendiente $m = 4$.

Caso 2
Plano cartesiano con C(h, k) = (2, 2). La ecuación $y' = 4x'$ es una línea recta que pasa por el nuevo origen (2, 2).

Nota: en ambos casos la gráfica es exactamente la misma, lo único que se hizo fue trasladar el origen al punto (2, 2) y los ejes ahora pasan por ese punto.



Para conocer más sobre **la traslación de coordenadas**, te recomendamos visitar la siguiente página web: Superprof. (s.f.). *Traslaciones*. Recuperado de http://www.vitutor.com/geo/vec/c_2.html

Tema 15. Desigualdades cuadráticas

Este tema se trabajará con la plataforma tecnológica solamente.

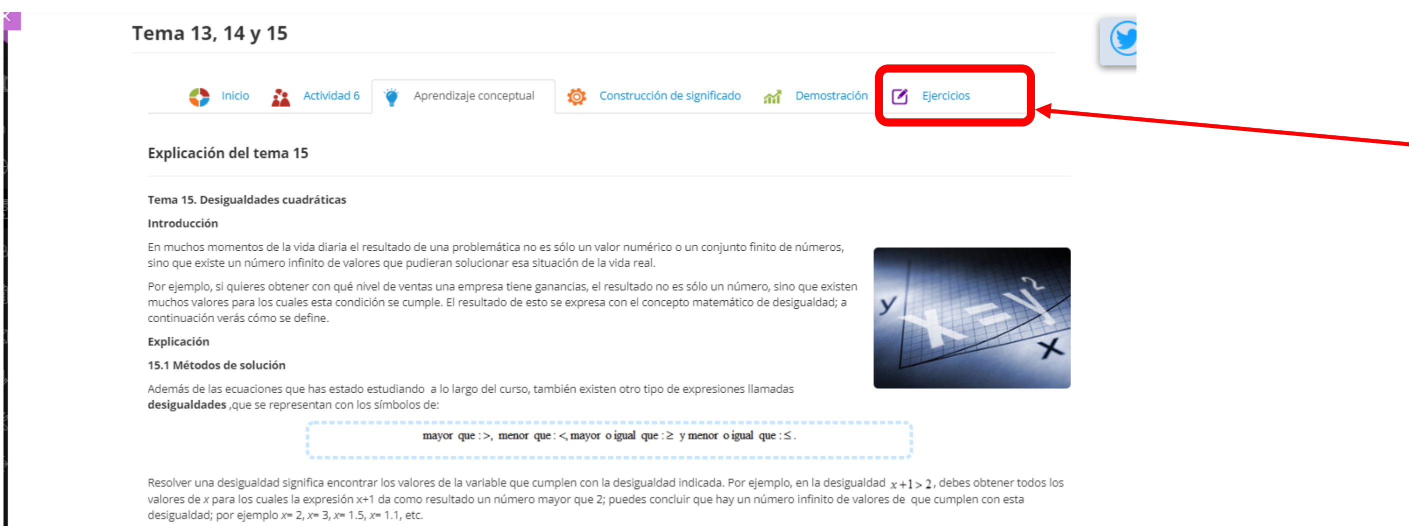
Contenido de la plataforma tecnológica

15.1 Métodos de solución

Este tema se trabajará exclusivamente con la plataforma tecnológica de Tecmilenio y **no se usará ALEKS**, por lo que la evaluación de este tema se hará con el ejercicio propuesto de la plataforma.

Instrucciones

Con tu número de nómina, ingresa a la plataforma tecnológica y busca el curso que se está impartiendo en el periodo escolar. En el apartado de **Lecturas de apoyo**, aparecerán todas las explicaciones de los temas a tratar en este curso. En la parte de Módulo 3, Tema 15, está activado el ejercicio que el alumno deberá realizar (con el que se evaluará el tema).



Se recomienda seguir la explicación del tema que proporciona la plataforma. Esta cuenta con ejemplos resueltos que se pueden presentar a los alumnos.

Para la evaluación de este tema, el alumno realizará los ejercicios que se presentan en la plataforma.

Realiza lo siguiente en la explicación de clase:

- Inicia el tema representando los signos de desigualdad.
- Crea una lluvia de ideas en donde se logre entender la diferencia entre una igualdad y una desigualdad.
- Realiza los ejemplos de la plataforma para que el alumno pueda representar la respuesta correcta.

Video de apoyo para que el alumno comprenda el tema.

Para conocer más sobre **las desigualdades cuadráticas**, revisa el siguiente video:
KhanAcademyEspañol. (2014, 2 de marzo). *Desigualdades cuadráticas* [Archivo de video]. Recuperado de
https://www.youtube.com/watch?v=5s7Mh-44YcQ

Estimado profesor, espero que estas notas de enseñanza sean de utilidad y apoyen en la orientación de tu trabajo.

Saludos cordiales.